Memoria del

Foro virtual 2020

Modelación

Variación

Covariación

en

Matemática Educativa

Agosto 2020

Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
2020

Editores

Dra. Marcela Ferrari Escolá
Dr. Gustavo Martínez Sierra

Índice

Reportes de investigación

Avances de investigación

Revisión de la literatura

Experiencias de aula y Recursos didácticos

Reportes de Investigación

Comprensión del concepto de variable como incógnita en el marco de la Enseñanza para la comprensión en estudiantes del grado quinto de básica primaria

Helmer Danilo Diosa Bedoya
Universidad de Antioquia

La investigación se enfoca en los procesos de comprensión del concepto de variable como incógnita, en el marco referencial de la Enseñanza para la Comprensión, a partir del contexto en el que se desenvuelven estudiantes de quinto grado, el modelo flexible de la Escuela Nueva y la unidad curricular que contiene actividades progresivamente secuenciadas encaminadas a fortalecer algunos conceptos fundamentales para la comprensión del concepto objeto de estudio, como lo son el número oculto, la incógnita, la variable y la variación.

A partir del estudio de caso, los elementos y las cualidades de la comprensión en las que se encuentran las dimensiones contenidas en el marco de referencia: contenidos, métodos, propósitos y la de formas de comunicación; la clasificación dentro de sus niveles del mismo marco: novato, ingenuo, aprendiz y maestría y de los descriptores finales contenidos en la rúbrica de desempeño se hizo posible cumplir con el objetivo de la investigación: Describir cómo los estudiantes del grado quinto de Básica Primaria comprenden el concepto de variable como incógnita en el marco de la EpC, determinando el nivel en el que se encontraban en cada una de las dimensiones al iniciar el proceso de investigación con respecto al objeto de estudio.

Varios autores han abordado el concepto de variable, entre ellos Trigueros, Reyes, Ursini (1996) quienes presentan tres significados de la variable: número general, número funcional e incógnita. De estos solo se abordó el último ya que, al realizar el rastreo por los referentes nacionales de calidad del Ministerio Nacional de Colombia en concordancia con el plan de área del Centro Educativo Rural Casa Grande del municipio de Concordia Antioquia Colombia, es el que se enfatiza para el ciclo de primaria.

Referencias bibliográficas de investigación

Acevedo, D. (2011). *Comprensión del Concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado.* Medellín Colombia: Universidad de Antioquia.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263.

Benalcázar, L. O. (2012). *Las ecuaciones de primer grado en la escuela: dificultades y tratamiento.* Trabajo de grado de pregrado., Universidad del Valle.

Betancourth, M. E. & Madroñero, E.S. (2014). *La Enseñanza para la Comprensión como didáctica alternativa.* Tesis de Maestría, Universidad de Manizales. Pasto Colombia.

Blythe, T. (1998). *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. Buenos Aires: Paidós.

Blythe, T.& Perkins. (1998). Comprender la comprensión. En T. Blythe (Ed.). *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. (pp. 35-42). Buenos Aires: Paidós.

Blythe, T.& Outerbridge, D. (1998). Metas de comprensión. En T. Blythe. *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. (pp. 65-86). Buenos Aires: Paidós.

Blythe, T. & Gould, D. (1998). Desempeños de En T. Blythe. *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. (pp. 87-105). Buenos Aires: Paidós.

Blythe, T., Bondy, E. & Kendal, B. (1998). Evaluación Diagnóstica Continua. En T. Blythe. *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente* (pp. 107-127). Buenos Aires: Paidós.

Boix Mansilla, V. & Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* (pp. 215-256). Buenos Aires: Paidós.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., & Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 53-59.

Clavel, M. & Torres, J. (2010). *La enseñanza para la comprensión como marco conceptual para el mejoramiento de la calidad educativa: la estrategia de la evaluación integrativa.* Universidad Nacional de San Juan (Argentina), San Juan Argentina.

Colbert, V. (2006). Mejorar la calidad de la educación en escuelas de escasos recursos. El caso de la Escuela Nueva en Colombia. *Revista colombiana de educación*, (51). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Corberán, R. S. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de Razonamiento de van-Hiele.* Madrid, España: CIDE.

Duval, R. (2016). *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas*.

Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía*, *355*, 52-54.

Gascón, J. (1999). La Naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática 11*(1), 77-88

Gatica-Lara, F. & Uribarren-Berrueta, T. D. N. J. (2013). ¿Cómo elaborar una rúbrica? *Investigación en educación médica*, *2*(5), 61-65.

García, J., Segovia, I. & Lupiañez, J. L.(2014). El Uso de las letras como fuente de errores de estudiantes universitarios en la resolución de tareas algebraicas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1545-1566.

González, J. D. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café.* Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Hetland, L., Hammerness, K., Unger, C. & Gray Wilson, D. (1999). ¿Cómo demuestran los alumnos que comprenden? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* (pp. 257-297). Buenos Aires: Paidós.

Hurtado, G. E. (2015). Tendencias investigativas sobre el enfoque de enseñanza para la comprensión (EPC) en Hispanoamérica. *Revista del Centro de Investigación de la Universidad la Salle*, *11*(43), 21-60.

Juárez, J. A. (marzo de 2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: Un análisis mediante el modelo 3UV. *Revista de didáctica de las matemáticas Números, 76*, 83-103.

Kierán, C., Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 7* (3), 229-240.

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. En: K. Hart (Ed.). *Children's understanding of mathematics*. London.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Santa Fé de Bogotá: Serie lineamientos curriculares.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Santa Fé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. *Revolución Educativa.* Santa Fé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas.* Santa Fé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2017). *Mallas de Aprendizaje Matemáticas grado 5°.* (M. d. 2017, Ed.) Santa Fé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Morales, L., & Díaz, J. L. (2003). *Concepto de Variable: Dificultades de su uso a nivel universitario.* Reporte de tesis de Maestría, Universidad de Sonora, México.

Palarea, M. (26 de febrero de 1999). La adquisición del lenguaje algebraico: Reflexión de una investigación. *Revista de didáctica de las matemáticas Números, 40*, 3- 28.

Patiño, S. (2012). La enseñanza para la comprensión (EpC) Propuesta metodológica centrada en el aprendizaje del estudiante. *Revista Humanizarte. Volumen 8* (pp. 1-10). Universidad Manuela Beltrán.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica. [Versión ligeramente modificada en 2003.

Richhart, R., Stone, M., Buchovecky, E. & Hetland, L. (1999). ¿Cómo se ve en la práctica la Enseñanza para la Comprensión? en M. Stone, *La Enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* (pp. 169-212). Buenos Aires: Paidós.

Rivera, G. M. (2014). *Procesos de razonamiento y comprensión con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa.* Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia, Medellín Colombia.

Rojas, P. J. (2010). Iniciación al algebra escolar: elementos para el trabajo en el aula. *11 Encuentro Colombiano de Matemática educativa* (pp. 115-131). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de caso*. Editorial Morata, S.L. Cuarta edición. Madrid España.

Stone, M. (1999). *La Enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires: Paidós.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S., & Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias* (14), 351-363.

Trigueros, M., Ursini, S., & Lozano, D. (agosto de 2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática, 12*(2), 27-48.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación matemática*, *6*(03), 90-108.

Valencia, P. A. (2015). *Propuesta para la enseñanza en el aula del concepto de variable algebraica, a través de situaciones problema.* Trabajo de Grado de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Medellín Colombia.

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27*(1), 74-94. Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grado de educación primaria (9-10 años).* Tesís de Doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad de Ciencias y Educación., Bogotá.

Villa, J. A. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis de Doctorado, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Medellín, Colombia.

Zapata, S. (2019). *Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano*. Tesis de Doctorado, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Medellín, Colombia. Tesis no publicada.

La modelización y la introducción al razonamiento algebraico en el tercer ciclo de primaria

Izchel Guadalupe González Galaviz
Angelina Alvarado Monroy

Universidad Juárez del Estado de Durango
Facultad de Ciencias Exactas
Maestría en Matemática Educativa

La introducción temprana del Razonamiento Algebraico (RA) en la escuela primaria es una propuesta novedosa para la integración, interpretación y aplicación de los temas existentes en el currículo al hacer explícito su carácter algebraico. Al respecto, Carraher y Schliemann (2007) mencionan que esto es posible gracias a que el álgebra reside de manera implícita en tópicos como: razón, proporción, número racional, medición y en los diversos sistemas de representación como gráficas, tablas, notación y exploración de estructuras.

Cuando se habla de introducir el RA de manera temprana en la educación primaria, no es que se pretenda dar un curso de álgebra a los niños de este nivel educativo, más bien, la finalidad que se persigue es la de capacitar a los estudiantes mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad (Lins y Kaput, 2004).

En armonía con lo anterior, Carraher et al. (2007) afirman que la introducción temprana del RA genera oportunidades para impulsar el comienzo de representaciones intuitivas, de tal forma que, poco a poco los estudiantes empiecen a adoptar representaciones convencionales que funjan como herramientas para representar y entender las relaciones matemáticas en álgebra. Así mismo, para Kaput y Blanton (2001), el propósito de iniciar con el RA en la educación primaria supone que los estudiantes ahonden en el entendimiento de las matemáticas de manera que logren desarrollar habilidades de expresión y justificación sistemática de generalizaciones matemáticas. La propuesta que apoya estas posturas se conoce como *Early Algebra* o *Álgebra* T*emprana* (AT).

La propuesta de AT es diferente de lo que se denomina Pre-Álgebra, pues como mencionan Carraher y Schliemann (2007), sus finalidades son diferentes ya que, a pesar de que ambas se relacionan con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes de la enseñanza formal del álgebra, como menciona Molina (2009), la Pre-Álgebra sólo persigue suavizar la abrupta transición de la aritmética al álgebra, es decir, se considera como un puente que los estudiantes cruzan después de haber estudiado aritmética y antes de estudiar álgebra (Carraher & Schliemann, 2018) y de este modo, mitigar las dificultades que típicamente encuentran los alumnos en el aprendizaje del álgebra. El objetivo de la AT, según Blanton y Kaput (2005), no es sólo facilitar el posterior estudio del álgebra, sino promover en los alumnos un aprendizaje, con comprensión, más profundo y complejo de las matemáticas escolares. Los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son considerados hábitos mentales importantes que todos los alumnos deben adquirir y pueden emerger con naturalidad para enriquecer la actividad matemática escolar. El AT plantea que, las experiencias para construir y expresar generalizaciones matemáticas, sean un proceso uniforme que empiece desde edades muy tempranas. Además, anima a los docentes a fomentar la observación y la descripción de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y a propiciar un ambiente escolar en el que se valore que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten y comprueben ideas.

En este sentido, la presente propuesta se basa en documentar el diseño de dos Actividades Detonadoras de Modelos (ADM´s) (Lesh y sus colegas, 2000) y su proceso iterativo de evolución, para lograr promover el desarrollo temprano del RA centrado en las ideas de Variación y Proporcionalidad a fin de que puedan ser adoptadas en diferentes contextos con estudiantes de tercer ciclo de educación primaria.

Con respecto a las ADM´s, éstas permiten que sean los estudiantes quienes participen en la construcción de modelos y desarrollen, de manera simultánea, sus ideas matemáticas y su competencia como solucionadores de problema a través de contextos auténticos y estimulantes que permitan una interpretación significativa y la construcción de diversos modelos generalizables y reutilizables (Lesh y Doerr, 2003)

La Investigación Basada en el Diseño (IBD) (Swan, 2014) fue la metodología seleccionada para el logro de los objetivos del presente trabajo, cuyo enfoque formativo es planear, diseñar, desarrollar y refinar un producto o herramienta didáctica a través de ciclos de promulgación, observación, análisis y rediseño. Siguiendo las fases de la IBD propuestas por Cobb y Gravemeijer (2008) durante la primera fase, la de preparación para el experimento y análisis prospectivo, se construyeron y diseñaron las primeras versiones de las dos ADM´s siguiendo los principios de diseño propuestos por Lesh y sus colegas (2000). Los contextos seleccionados y utilizados para cada una de las actividades son cercanos y de interés para los estudiantes al centrar y motivar la resolución de las situaciones presentadas desde episodios cortos (15 minutos) de una seria infantil con ideas matemáticas. La primer ADM tiene como finalidad provocar el surgimiento de la idea fundamental de variación lineal vinculada "al procedimiento o código para cifrar o proteger el escuadrón" que se solicita a los modeladores y está basada en otros diseños de ADM´s para educación secundaria (Alvarado-Monroy, Olvera-Martínez y Alvarado-Quiñonez, 2017; Alvarado-Monroy y Olvera-Martínez, 2020). La segunda ADM, pretende trabajar la idea de proporcionalidad, al tener como tarea, el encontrar la medida del zapato de un niño cuando tenía siete años edad para la búsqueda de un mapa que enterró a esa edad y que localiza a partir de 45 pasos contados desde una pared, para esto, solamente se saben algunos datos que están registrados en una receta médica de cuando tenía siete años (peso, altura), ésta se modificó de la ADM "Big Foot" propuesta en Lesh y Doerr (2003). La segunda fase, la de experimentación, se llevó a cabo a través de dos ciclos iterativos, en los cuales, se concibió el diseño, se probó con un grupo de profesores y en una escuela primaria con dos grupos, de 5to y 6to grado y se revisó para finalmente hacer las modificaciones pertinentes. Durante este proceso se reflexionó sobre el diseño para la evaluación de su impacto en el cumplimiento de metas y objetivos en el contexto educativo para el que fue creado y por último, durante la tercera fase, Análisis retrospectivo, se analizaron los tipos de ajustes que se requirieron realizar al diseño inicial de las ADM´s propuestas, con la finalidad de que éstas puedan ser una propuesta viable que permita su replicabilidad en otros contextos.

Con respecto a esta última fase, para el análisis de los resultados a lo largo de los dos ciclos iterativos y para la evaluación del diseño, se han estudiado algunas de las condiciones y restricciones para que éste sea adoptado y sobreviva a largo plazo (Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer, 2001). En este sentido, resultó necesario considerar: la fiabilidad del diseño; su capacidad de replicabilidad; la capacidad de generalización; y, la potencial utilidad del diseño.

Referencias Bibliográficas

Alvarado-Monroy, A., & Olvera-Martínez, C. (2020). Ações do professor para promover discussões matemáticas produtivas em um contexto de modelagm e criptografia. *Educação Matemática e Pesquisa, 22*(1), 185-213.

Alvarado-Monroy, A., Olvera-Martínez, C., & Alvarado-Quiñones, M. (2017). La Criptografía como contexto para Introducir el Estudio del Concepto de Función en Educación Secundaria. En C. Cristóbal-Escalante, C. Olvera-Martínez, & V. Vargas-Alejo (Ed.), *Acta Tomo II Tópicos Selectos de Educación en CITeM. Educación para la Interdisciplinariedad* (págs. 19-43). Durango, México: ECORFAN- México, S.C.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 669-705).

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Thinking. En C. Kieran, *Teaching and Lerning Algebraic Thinking with 5- to 12-year-olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (págs. 107-140). Springer.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning Processes. En A. E. Kelly., & R. A. Lesh, *Handbook of Design Research Methods in Education Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (págs. 68-95). Routledge, Taylor & Francis Group.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences, 10*(1-2), 113-163.Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience, Part I: Transforming Task Structures. En H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent, *Proceedings of the 12th ICMI Study: The Future of the Teaching and LEarning of Algebra* (págs. 344-351). Melbourne,Australia.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving. En R. Lesh, & H. M. Doerr, *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving* (págs. 3-34). USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. R. (2000). Principles for Developing Thought- Revealing Activities for Students and Teachers. En A. Kelly, & R. Lesh, *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (págs. 591-646). Nahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The current State of the Field. En *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (págs. 45-70).

Molina, M. (2009). Una propuesta de Cambio Curricular: Integración del Pensamiento Algebraico en Educación Primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Swan, M. (2014). Design Research in Mathematics Education. En S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 148-152). Springer.

Modelación matemática de un fenómeno natural: el papel de la medición y el razonamiento covariacional

Fátima Reyna Sandoval Jiménez
Gustavo Martínez Sierra

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas
Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

En esta investigación estudiamos el proceso de modelación de un fenómeno natural por estudiantes universitarios, así como el papel de la medición y el razonamiento covariacional durante el proceso. Para analizar el proceso de modelado nos basamos en el ciclo de modelación de la perspectiva realista, y para el razonamiento covariacional en un marco que contiene seis niveles de razonamiento. Para provocar el modelado por parte de los estudiantes se diseñó una tarea de modelación en la que tienen que analizar el comportamiento del fenómeno de enfriamiento, a partir de mediciones que tienen que realizar ellos mismos de las variables en juego; tiempo y temperatura. Los resultados encontrados revelan que la secuencia de pasos de modelación no es lineal; que la medición permite intuir el comportamiento del enfriamiento sin tener aún un modelo, además de que favorece el tránsito entre el mundo real y matemático; y que el análisis del razonamiento covariacional permite comprender mejor los pasos de modelación en que está involucrada la relación, matematización y trabajo matemático de las variables.

Palabras Clave: Modelación matemática, Razonamiento covariacional, Medición, Fenómeno Natural.

Introducción

Promover competencias de modelación matemática es un objetivo central de la educación matemática, ya que se trata de competencias para resolver problemas del mundo real mediante el uso de las matemáticas (Kaiser, 2017), de hecho, los modelos matemáticos son considerados un puente para la educación de la ciencia, tecnología e ingeniería (Carreira & Baioa, 2018; Czocher, 2017; Kertil & Gurel, 2016). Así, la enseñanza de la modelación matemática permite dar sentido a la utilidad de las matemáticas (Hernandez-Martinez & Vos, 2018; Pollak, 2007), y verlas como una forma de pensar acerca de la vida (Brown & Stillman, 2017). Además, las tareas de modelado permiten la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Chang, Krawitz, Schukajlow, & Lin, 2020; Czocher, 2017; Kaiser & Schwarz, 2006; Maass & Engeln, 2018; Trigueros, 2014) y pueden ser llevadas a cabo por estudiantes promedio en escuelas ordinarias (Kaiser & Schwarz, 2006) y por estudiantes que no tienen un conocimiento matemático elevado (Chang, Krawitz, Schukajlow & Lin, 2020), logrando que expresen representaciones propias para explicar un fenómeno (Hitt & Quiroz, 2017).

Un factor que ha potenciado los resultados de la modelación es la experimentación, ya que permite simular procesos tecnológicos, técnicos y científicos (Carreira & Baioa, 2018) y dotar de nuevo significado a las nociones matemáticas en juego (Rodríguez & Quiroz, 2016). Dentro de la experimentación un aspecto de nuestro interés y del cual no hemos encontrado estudios en modelación matemática, es el papel de la medición; particularmente estamos interesados en el papel de la medición en el estudio de fenómenos naturales, ya que muchas de las leyes naturales de diversas disciplinas científicas a lo largo de historia fueron postuladas y comprobadas gracias a la medición (Jin et al., 2019).

Por otro lado, el comportamiento de diversos fenómenos naturales puede describirse a través de una función matemática, por lo que creemos que un buen modelo para describir el comportamiento de un fenómeno natural puede ser una función. Así, consideramos favorable el analizar la modelación de un fenómeno natural desde la mirada del razonamiento covariacional, ya que las funciones son un tema bastante estudiado dentro del razonamiento covariacional, como lo son las funciones cuadráticas (Villa-Ochoa, 2012), trigonométricas (Moore, 2014), logaritmo-exponenciales (Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra & Méndez-Guevara, 2016), paramétricas (Paoletti & Moore, 2017), el estudio de las funciones de manera general (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002), entre otros. Además, para que los estudiantes describan el comportamiento de un fenómeno natural, requieren observar y describir la relación de por lo menos dos variables, es decir, requieren razonar covariacionalmente. Y si bien se ha estudiado el razonamiento covariacional en la modelación de eventos dinámicos (Carlson et al., 2002; Kertil, Erbas, & Cetinkaya, 2019), se ha hecho sólo desde la lente del marco de razonamiento covariacional, y no desde algún marco referente a la modelación matemática.

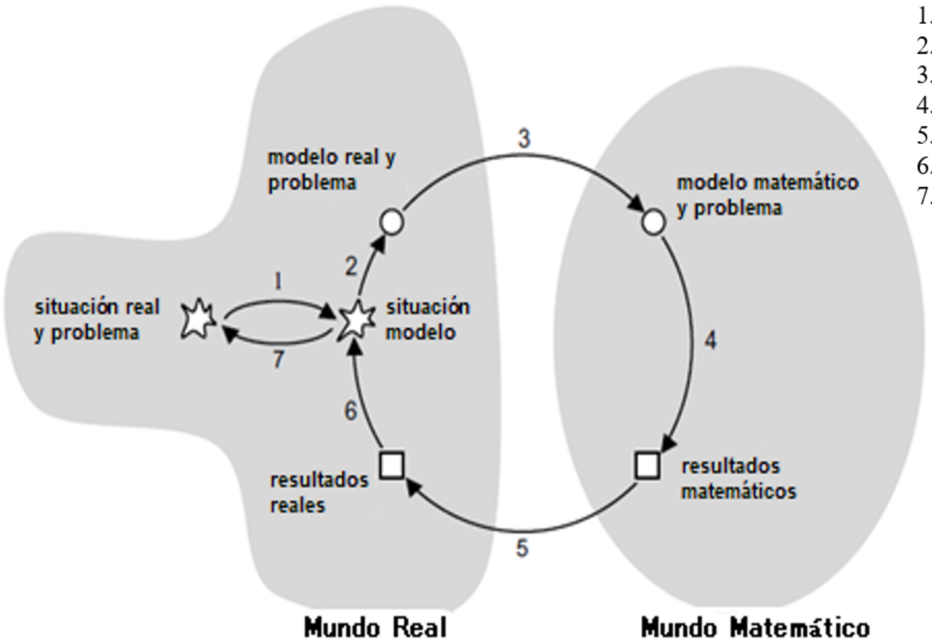
Así, tenemos como objetivo analizar cómo modelan matemáticamente los estudiantes un fenómeno natural, así como el papel de la medición y del razonamiento covariacional durante la modelación.

Marcos Teóricos

Modelación matemática

"La modelación matemática es el proceso de construir una representación matemática de la realidad, que captura, simula o representa rasgos o comportamientos específicos" (Cai et al., 2014, p. 150). En especial nosotros estamos interesados en estudiar el proceso de los estudiantes al construir una representación matemática que describa el comportamiento de un fenómeno natural.

Para analizar el proceso de modelado de los estudiantes nos basaremos en el proceso que sugiere Blum (2011) (Figura 1).



1. Comprender
2. Estructurar y simplificar
3. Matematizar
4. Trabajar matemáticamente
5. Interpretar
6. Validar
7. Exponer

Figura 1: Proceso de modelación de la perspectiva realista (Blum, 2011)

Razonamiento Covariacional

"El razonamiento covariacional se refiere a las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson et al., 2002, p. 354). En nuestro estudio, analizaremos tales actividades cognitivas de los estudiantes respecto a dos variables seleccionadas de un fenómeno natural.

Para analizar el razonamiento covariacional de los estudiantes en el proceso de modelado, nos basaremos en el marco conceptual de razonamiento covariacional de Thompson & Carlson (2017) (Tabla 1).

TABLA 1: Marco conceptual de razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017)

Nivel	Descripción
Nivel 0: Sin coordinación	La persona no tiene imagen de variables que varían juntas: se enfoca en una variación de una u otra variable sin coordinación de valores.
Nivel 1: Precoordinación de valores	La persona visualiza los valores de dos variables que varían, pero de forma asíncrona: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera, y así sucesivamente.
Nivel 2: Coordinación gruesa de valores	La persona forma una imagen general de valores de cantidades que varían entre sí: como "esta cantidad aumenta mientras que esa cantidad disminuye".
Nivel 3: Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y): tiene la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y).
Nivel 4: Variación continua gruesa	La persona prevé que los cambios en el valor de una variable suceden simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable: prevé que ambas variables varíen con una variación continua gruesa.
Nivel 5: Variación continua suave.	Prevé que ambas variables varíen de manera suave y continua.

Así, nuestras preguntas de investigación son las siguientes:

P1: ¿Cuál es el proceso de modelado de los estudiantes al estudiar el comportamiento de un fenómeno natural?

P2: ¿Cuál es el papel de la medición en el proceso de modelado de un fenómeno natural?

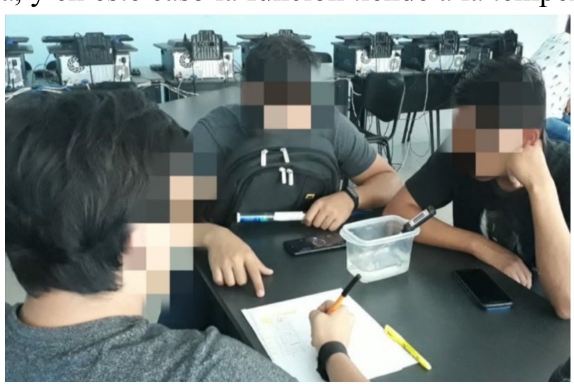
P3: ¿Cuál es el papel del razonamiento covariacional en el proceso de modelado de un fenómeno natural?

Metodología

Para poder recabar datos sobre el proceso de modelado de los participantes sobre el comportamiento de un fenómeno, diseñamos una tarea de modelación sobre el fenómeno de enfriamiento del agua, la cual implicó experimentación, medición y el estudio de la relación entre las variables (tiempo y temperatura) para describir el comportamiento. Previo a la aplicación de tarea de modelación se impartieron sesiones con el propósito de brindar conocimiento previo necesario para la tarea de modelación.

Tarea de modelación

La tarea de modelación consistió en la realización del experimento y medición de variables del enfriamiento del agua (Figura 1), en equipos de 3 integrantes. La idea es que observen a partir de sus mediciones que mientras una variable cambia en progresión aritmética, la otra cambia en progresión geométrica, por lo que se trata de una función exponencial y así puedan determinar el comportamiento del fenómeno. Además, tendrán que tomar en cuenta cómo afecta la temperatura ambiente, ya que es cuando la función tiende a cero que se manifiesta la progresión geométrica, y en este caso la función tiende a la temperatura ambiente.



Participantes

Esta investigación se realizó con un grupo de 9 estudiantes de la facultad de Ingeniería, en la Universidad Autónoma de Guerrero, campus Chilpancingo. Los participantes son de diferentes grados, y todos han cursado la materia de ecuaciones diferenciales.

Recolección de Datos

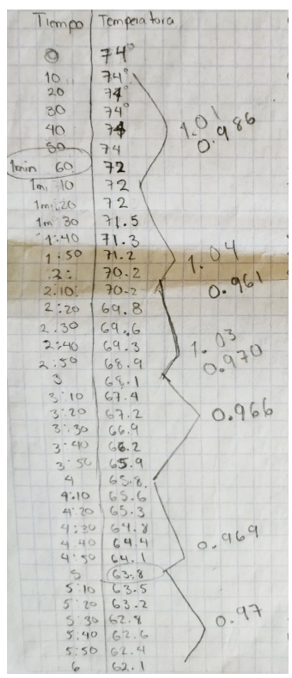
Se trabajó con los participantes durante 4 sesiones de entre 2 y 3 horas cada una. En cada una se videograbó y se tomó como evidencia sus hojas de trabajo.

Análisis de Datos

En este apartado analizaremos el proceso de modelación de los estudiantes bajo la lente del proceso de modelado que propone Blum (2011); también el papel de la medición en el proceso de modelación; así como el papel del razonamiento covariacional, basándonos en el marco de razonamiento covariacional de Thompson & Carlson (2017).

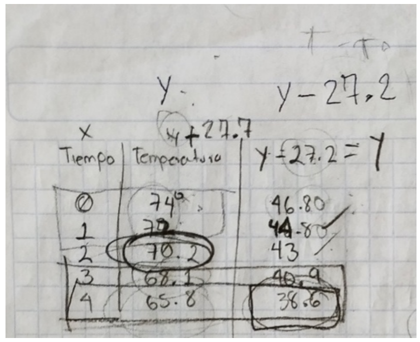
El equipo 1, relacionan que conforme pasa el tiempo, la temperatura cambia. Registran la temperatura cada 10 segundos durante 40 minutos en una tabla.

Después grafican los datos correspondientes a múltiplos de 5 minutos, donde la gráfica les hace pensar que podría ser una función exponencial, así que analizan sus datos para corroborar si cumple con la condición de una función exponencial, es decir, que mientras el tiempo cambia aritméticamente, la temperatura cambia geométricamente. Realizan una división entre los valores de la temperatura cada minuto y les resultó un factor casi igual.

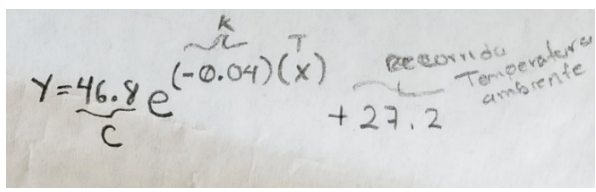


Además, nos damos cuenta que los estudiantes tienden a validar sus resultados matemáticos en el mundo matemático, antes de validar sus resultados matemáticos en el mundo real.

Los estudiantes identifican que la temperatura ambiente también influye, y deciden restarla a los valores que midieron de la temperatura, justificando que la curva está recorrida tendiendo a la temperatura amiente y no a cero.



Finalmente buscan encontrar una expresión algebraica que describa el comportamiento de sus datos, sin embargo, tuvieron errores, ya que tomaron datos da la columna equivocada. Corrigen ese error y obtienen que la función que describe el comportamiento del enfriamiento del agua es $T = 46.8e^{-0.04t} + 27.2$. La validan dando varios valores de tiempo y ven resultan valores de temperatura muy cercanos a sus valores experimentales, justificando que esa diferencia puede deberse a un error de medición.



Presentamos en la Figura 2 una representación de la secuencia en que se fueron evidenciando los pasos del proceso de modelación matemática y los niveles de razonamiento covariacional.

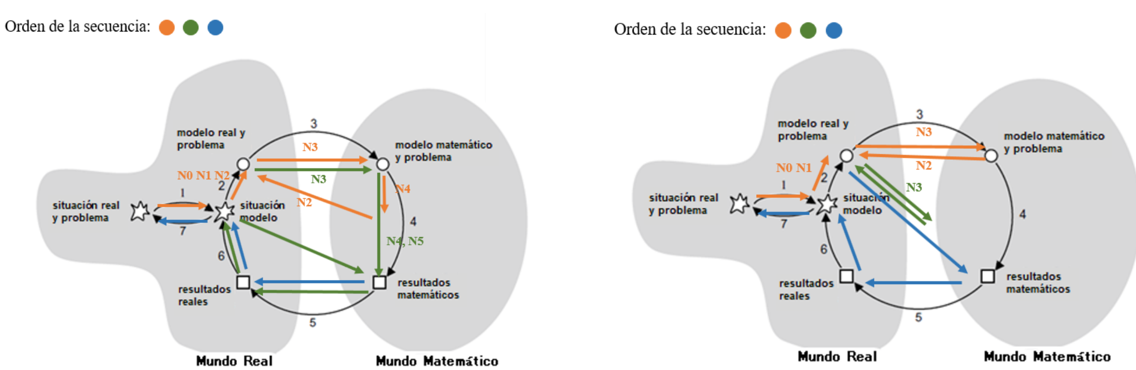


Figura 2: Secuencia de pasos de modelación matemática, y los niveles de razonamiento covariacional de los equipos 1 y 2: Los pasos se muestran a través de las flechas siguiendo la secuencia de colores en orden naranja, verde, azul; los niveles se representan con la letra N seguido del número correspondiente a cada nivel, siguiendo la secuencia de colores naranja, verde.

Discusión y Conclusiones

Los participantes no siguieron el proceso de modelo idealizado, sino que muestran su propio proceso, lo cual está en línea con los hallazgos de Blum & Borromeo (2009); Hankeln (2020); Meistera & Upmeier (2019).

Los participantes no dieron vueltas completas al ciclo al tomar en cuenta nuevos factores como lo sugiere Blum (2011), sino que regresaron al punto en que había que considerar algo más o hacer correcciones.

Los participantes tienden a hacer una validación de resultados matemáticos en el mundo matemático antes que el en real, sugerimos agregar una fase de validación en el mundo matemático.

La medición promueve que los participantes tengan una noción intuitiva de la ley del enfriamiento.

Son los datos de las mediciones los que permiten transitar entre el mundo real y el matemático. Los datos ordenados se convierten en el modelo matemático; Los resultados matemáticos se interpretan y validan en el mundo real con los datos.

La medición promovió el desarrollo del razonamiento covariacional, ya que todos los niveles que manifestaron los estudiantes fueron a través del manejo de los datos. A diferencia de las tareas como el llenado de botellas (Carlson et al., 2002) o que impliquen movimiento como la mayoría de las tareas para estudiar el razonamiento covariacional, el cambio de las variables de tiempo y temperatura no se puede describir si no se toman medidas.

La relación adecuada entre las variables, lo cual se analiza desde el razonamiento covariacional, es lo que permite a los participantes el obtener la función que describe sus datos, por lo tanto, un modelo para describir el comportamiento del fenómeno.

Los niveles de razonamiento covariacional aparecen en los pasos 2, 3 y 4 del proceso modelación de la perspectiva realista, permitiendo un análisis más detallado en la parte del proceso que involucra la relación entre variables.

De manera general confirmamos la idea de que la medición de los atributos de un fenómeno permite la generación de modelos en los que se muestra su relación entre variables (Jin et al., 2019).

Referencias bibliográficas

Besson, U. (2010). The history of the cooling law: When the search for simplicity can be an obstacle. *Science and Education*, *21*(8), 1085–1110. https://doi.org/10.1007/s11191-010-9324-1

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G Kaiser, W. Blum, Borromeo, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 15–30). New York, USA: Springer.

Blum, Werner, & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Brown, J. P., & Stillman, G. A. (2017). Developing the roots of modelling conceptions: 'mathematical modelling is the life of the world.' *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(3), 353–373. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1245875

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J. A., Borromeo Ferri, R., Geiger, V., Stillman, G., … Kwon, O. (2014).

Mathematical Modeling in School Education: Mathematical, Cognitive, Curricular, Instructional, and Teacher Education Perspectives. In D. Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan (Ed.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*. Vancouver, Canada: PME.
Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958
Carreira, S., & Baioa, A. M. (2018). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: On the student's sense of credibility. *ZDM*, *50*(1–2), 201–215. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0905-1
Chang, Y. P., Krawitz, J., Schukajlow, S., & Lin, K. (2020). Comparing German and Taiwanese secondary school students ' knowledge in solving mathematical modelling tasks requiring their assumptions. *ZDM*, *52*(1), 59–72. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01090-4
Cheng, K. C., & Fujii, T. (1998). Heat in history Isaac Newton and heat transfer: Heat Transfer Engineering. *Heat Transfer Engineering*, *19*(4), 9–21. https://doi.org/10.1080/01457639808939932
Czocher, J. A. (2017). How can emphasizing mathematical modeling principles benefit students in a traditionally taught differential equations course? *Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 78–94. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.10.006
Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *Journal of Mathematical Behavior*, *42*, 92–108. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.003
Hankeln, C. (2020). Mathematical modeling in Germany and France: a comparison of students' modeling processes. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(2), 209–229. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09931-5
Hernandez-Martinez, P., & Vos, P. (2018). "Why do i have to learn this?" A case study on students' experiences of the relevance of mathematical modelling activities. *ZDM*, *50*, 245–257. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0904-2
Hitt, F., & Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 151–175. https://doi.org/10.17227/01203916.73rce151.175
Jin, H., Delgado, C., Bauer, M. I., Wylie, E. C., Cisterna, D., & Llort, K. F. (2019). A hypothetical learning progression for quantifying phenomena in science. *Science and Education*, *28*(9–10), 1181–1208. https://doi.org/10.1007/s11191-019-00076-8
Kaiser, Gabriele. (2017). The teaching and learning of mathematical modeling. In J Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267–291). United States: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
Kaiser, Gabriele, & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *ZDM*, *38*(2), 196–208. https://doi.org/10.1007/BF02655889
Kaiser, Gabriele, & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302–310.
Kertil, M., Erbas, A. K., & Cetinkaya, B. (2019). Developing prospective teachers' covariational reasoning through a model development sequence. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(3), 207–233. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1576001
Kertil, M., & Gurel, C. (2016). Mathematical Modeling: A Bridge to STEM Education. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *4*(1), 44–55. https://doi.org/10.18404/ijemst.95761
Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885
Maass, K., & Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(1–2), 273–285. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0911-y
Meistera, J., & Upmeier, A. (2019). *Investigating students ' modelling styles in the process of scientific-mathematical modelling*. *2019*, 8–14. https://doi.org/10.18452/21039
Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0102
Newton, I., Cohen, B., Schofield, R., & Boas, M. (1958). *Isaac Newton papers and letters on natural philosophy and related documents*. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004
Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *48*(August), 137–151. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.003

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling: A conversation with Henry Pollak. In Werner Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 109–120). Retrieved from http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Rodríguez, R., & Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*, *28*(3), 91–110. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262016000300091&lang=pt%5Cnhttp://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v28n3/1665-5826-ed-28-03-00091.pdf

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, Covariation and Functions: Foundation ways of thinking mathematically. *Compendium for Research in Mathematics Education*, 421–456.

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática*, *25 años*, 207–226.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné Episteme y Didaxis*, *31*, 9–25. https://doi.org/10.17227/ted.num31-1646

Winterton, R. (1999). Newton's law of cooling. *Contemporary Physics*, *40*(3), 205–212. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75148-1

Avances de Investigación

Rescatando argumentos covariacionales del sigod XVIII: El caso de Agnesi

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero

Existe una creciente línea de investigación que considera que el razonamiento covariacional, es decir, actividades cognitivas que involucran la coordinación de la variación de dos cantidades mientras se atiende la forma en que cada una cambia en relación con la otra (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002, p.354) es un elemento fundamental en el entendimiento de los estudiantes respecto a función.

En lo que se refiere específicamente a la función exponencial Ferrari, Martínez y Méndez (2016) identifican dos formas de aproximar a la función exponencial: la primera, desde la proporcionalidad del cambio (Castillo-Garsow, 2010; Ellis, Ozgur, Kulow, Williams & Amidon, 2012; Thompson, 2008); y, la segunda, desde la yuxtaposición de dos progresiones diferentes (Confrey & Smith, 1994, 1995).

Thompson (2008), por ejemplo, considera que una característica que define a las funciones exponenciales es el valor de tasa proporcional ($\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}$) en la cual una función cambia con respecto a su propio valor en un determinado argumento. Castillo-Garsow, Johnson y Moore (2013), reflexionan sobre la apropiación de continuidad en la descripción de fenómenos variacionales, considerando importante reconocer, en las producciones de estudiantes, entre una covariación continua gruesa (chunky), es decir, que existen huecos entre dos puntos reconocidos; y otra, covariación continua suave (smooth), donde se considera que han construido la imagen de razón de cambio instantánea. Elementos que son recogidos por Thompson y Carlson (2017) al generar nuevos niveles para describir el desarrollo del razonamiento covariacional y que Johnson (2015) denomina “covariación dinámica”.

Por otro lado, Confrey & Smith (1994, 1995), pioneros en el uso del término “covariación” entendiéndola como la yuxtaposición de dos progresiones cada una de ellas construidas de manera independiente a través de análisis numéricos e identificación de patrones. Ideas que Johnson (2015) denomina “covariación estática”. En particular, Confrey & Smith (1994, 1995), caracterizan la covariación exponencial con la yuxtaposición de una progresión aritmética y una progresión geométrica; basándose en las operaciones entre “counting word” y “splitting word”.

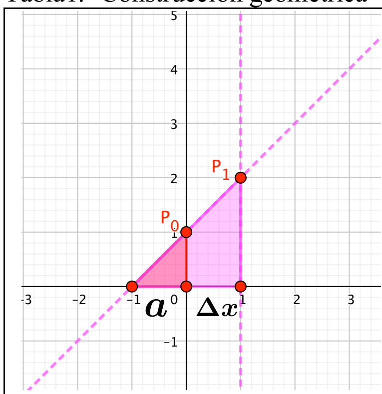
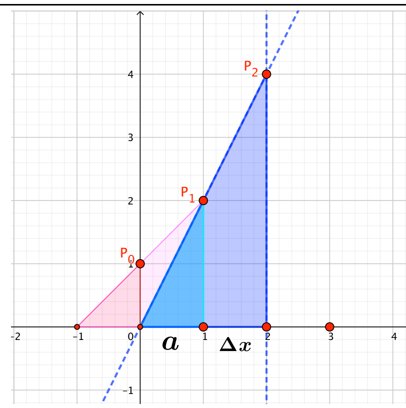
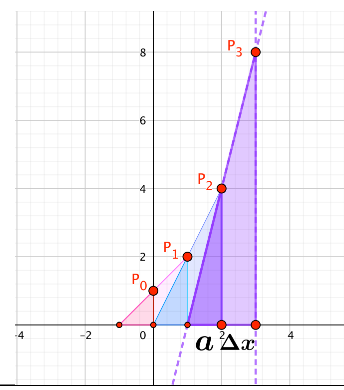
Retomando estas ideas, Ferrari, Martínez y Méndez (2016) caracterizan la covaración logarítmica-exponencial, al explicitar que la función logarítmica y la función exponencial pueden construirse bajo la misma covariación, misma que surge al considerar ambas funciones como la yuxtaposición de una progresión aritmética y otra geométrica, sin importar qué tipo de cambio corresponde al dominio o a la imagen. Se rescata, de esta manera, lo que en el siglo XVII se consideraba una “curva logarítmica”.

De una exploración socioepistemológica de logaritmos (Ferrari, 2008) retomamos argumentos geométricos del siglo XVIII, para realizar nuevas exploraciones con estudiantes y profesores en esta nueva investigación de la cual reportamos las ideas principales.

El objetivo de esta investigación gira alrededor de la caracterización de una función exponencial desde la construcción geométrica de puntos de la curva publicado por Agnesi (1747) y discutiendo lo estático de su propuesta. Proponemos retomar la construcción orignial de Agnesi adecuada a 2^x tomando como dominio inicial los naturales para luego de caracterizar la función exponencial 2^x, extenderemos la discusión hacia que papel juegan los triángulos semejantes así como la partición del eje x para generar nuevas funciones exponenciales. Se espera que con ello, se logre una revisión minusiosa de la construcción de puntos que nos lleve a generar ideas de continuidad abonando al desarrollo de razonamiento covariacional.

Argumentos rescatados

Tabla1.- Construcción geométrica

		
Triángulo rectángulo inicial: vértices: $x_{-1};\ x_0;\ P_0$ Triángulo semejante: Vertices: $x_{-1};\ x_1;\ P_1$ $a = x_0 - x_{-1};\ \Delta x$ $\frac{y_0}{a} = \frac{y_1}{a+\Delta x}$ Por tanto: $y_1 = \frac{a+\Delta x}{a} y_0$	Triángulo rectángulo inicial: vértices: $x_0;\ x_1;\ P_1$ Triángulo semejante: Vertices: $x_0;\ x_2;\ P_2$ $a;\ \Delta x$ $\frac{y_1}{a} = \frac{y_2}{a+\Delta x}$ Por tanto: $y_2 = \left(\frac{a+\Delta x}{a}\right)^2 y_0$	Triángulo rectángulo inicial: vértices: $x_1;\ x_2;\ P_2$ Triángulo semejante: Vertices: $x_1;\ x_3;\ P_3$ $a;\ \Delta x$ $\frac{y_2}{a} = \frac{y_3}{a+\Delta x}$ Por tanto: $y_3 = \left(\frac{a+\Delta x}{a}\right)^3 y_0$

Luego de construir varios puntos de la curva, siguiendo las ideas de Agnesi, se percibe que la partición del eje x es constante (Δx) generádose una progresión aritmética. Por otro lado, las alturas de los triángulos que se van construyendo, varían siguiendo una progresión geométrica. Se genera así una covariación logarítmica exponencial con un dominio entero. Extender el dominio hacia los números reales para discutir la continuidad de una función exponencial, involucra otros elementos como el cambio de la partición y los triángulos semejantes involucrados.

En esta investigación nos enfocamos en esta extensión del dominio para propiciar la reflexión sobre la continuidad de la función cuestionándonos sobre ¿Qué varía? ¿cómo? ¿cuánto? ¿con qué rapidez? (Figura 1)

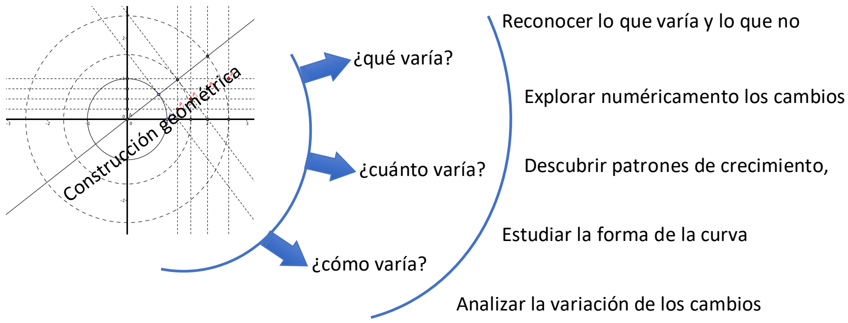


Figura 1: Estructura del diseño

Referencias bibliográficas

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 352–378.

Carlson

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. For the Learning of Mathematics, 33(3), 31–37.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. Educational Studies in Mathematics, 26(2-3), 135–164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. Journal for Research in Mathematics Education, 26(1), 66–86.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. En R. Mayes & L. Hatfield (Eds.), Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context (pp. 93–112). Laramie, WY: University of Wyoming.

Ferrari, M. (2008). Un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. De facilitar cálculo a una primitiva. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados-IPN. México.

Ferrari, M, Martínez-Sierra, G. & Méndez, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. Journal of Mathematical Behavior (42). 92–108.

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. Educational Studies in Mathematics 89(1), 89-110.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: some spadework at the foundations of mathematics education. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sépulveda (Eds.), Plenary paper delivered at the 32nd annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 1) (pp. 31–49). México: Morelia.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, Covariation and Functions: Foundation ways of thinking mathematically. *Compendium for Research in Mathematics Education*, 421–456.

Un trabajo de diseño sobre modelación en situaciones de optimización

María Elena Irigoyen Carrillo
Angelina Alvarado Monroy

Universidad Juárez del Estado de Durango
Facultad de Ciencias Exactas

Palabras clave: matemáticas, modelación, optimización, Educación Media Superior, experimentación de diseño.

La optimización es una idea fundamental presente de manera natural en diversas situaciones de la vida diaria. Esto posibilita encontrar una variedad de contextos interesantes para que los estudiantes de todos los niveles educativos puedan modelar fenómenos que requieren de encontrar un valor óptimo. Específicamente en el área de la matemática, el estudio de máximos y mínimos y la resolución de problemas de optimización (PO) conforma parte del currículo de la Educación Media Superior debido a su presencia y utilidad en la vida real. En el ámbito educativo, y de acuerdo con Malaspina (2007), parte de la importancia de los PO recae en que pueden ser una medio para reflexionar sobre: el aprendizaje de las matemáticas; la importancia y la oportunidad de la formalización; y la interrelación entre la percepción intuitiva y la solución formal de un problema.

Una forma en que los estudiantes adquieren la habilidad de aplicar las matemáticas que conocen para resolver problemas es a través del estudio de situaciones problemáticas que sean factibles de representarse mediante modelos matemáticos (Trigueros, 2009). Por ello, resulta propicio trabajar con los estudiantes empleando la modelación matemática como estrategia para el desarrollo de sistemas conceptuales, los cuales en principio pueden ser incipientes al enfrentar las situaciones de optimización, pero que al explorarlos, los estudiantes pueden encontrar, manipular y representar relaciones en términos matemáticos, así como también desarrollar ideas que permitan canalizarlos hacia las matemáticas que se desean enseñar (Lehrer & Schauble, 2000; Lesh & English, 2005).

En esta dirección, esta plática tiene el propósito de exponer el avance de un trabajo sobre el diseño de una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de EMS que involucra la resolución de PO y está centrada en la Perspectiva de Modelos y Modelación (PMM) (Lesh y Doerr, 2003), la cual ya ha sido experimentada con la intención de evaluar su funcionamiento didáctico. Dicho trabajo se ha desarrollado bajo la metodología de investigación basada en el diseño (IBD), en la que se diseña, se prueba y se refina un producto a través de ciclos iterativos de observación, análisis y rediseño (Bakker & van Eerde, 2015). Más que analizar los modelos producidos por los estudiantes durante la experimentación, se pretende informar acerca del proceso de diseño de las actividades, explicar su funcionamiento y señalar las mejoras en el mismo, esto, a través del seguimiento de las fases de la IBD ajustadas a la PMM. Dichas fases van desde la realización de experimentos de pensamiento previos a la experimentación en el aula (como parte de un estudio prospectivo) hasta un análisis retrospectivo (post-durante la experimentación) que permiten informan la evolución del diseño y aportan evidencia para evaluar la factibilidad de la secuencia didáctica.

Referencias bibliográficas

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner, C. Knipping, & N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Springer.*

Lehrer, R., & Schauble, L. (2000). The development of model-based reasoning. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*(1), 39-48.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Introduction to an economic problem: a Models and Modeling Perspective. En D. Aliprantis, & G. Carmona (Edits.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Mahawaha,* NJ.: Lawrance Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., & English, L. (2005). Trends in the evolution of the Models and Modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 37*(6), 487-489.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(3), 365-399.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.

La modelación matemática como medio para el desarrollo de la concepción covariacional del concepto función

Aline Lizbeth Vargas Ramos
Gustavo Martínez Sierra

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas
Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

En este escrito presentamos una investigación que tiene como objetivos; describir cómo un proceso de modelación matemática escolar influye en el desarrollo de la concepción covariacional del concepto función, desarrollar niveles de razonamiento covariacional en estudiantes de bachillerato y universidad a través de la modelación de situaciones dinámicas, y finalmente, evidenciar la relación entre los constructos teóricos razonamiento covariacional y modelación matemática escolar. En esa dirección, presentamos una revisión de la literatura, así como la metodología de trabajo a seguir pensada para llevar a la práctica tareas de modelación a través de un experimento de enseñanza, con el fin de recolectar datos que ayuden a fundamentar empíricamente el estudio. Y finalmente, describimos los resultados tentativos de investigación.
.

Palabras clave: razonamiento variacional y covariacional, modelación matemática, concepto función, tareas de modelación, experimento de enseñanza.

Revisión de la literatura

A finales de los años ochenta y principios de los noventa surge el razonamiento covariacional como una forma de razonar en matemáticas. Para Thompson (1988) la covariación se presentaba en términos de la conceptualización de los valores de cantidades individuales como variables y luego de dos o más cantidades como variables de forma simultánea, mientras que Confrey (1991) se refería a coordinar los valores de dos variables conforme cambian.

Posteriormente, Saldanha & Thompson (1998) describieron a la covariacion cómo tener en mente una sostenida de los valores de dos cantidades simultáneamente, sobre la base de su investigación Carlson et al. (2002) compartieron por primera vez un marco cognitivo del razonamiento covariacional conformado por niveles de desarrollo: coordinación, dirección, coordinación cuantitativa, razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea que un sujeto debía realizar para decir que razonaba covariacionalmente.

Carlson et al. (2002) fundamentaron su investigación basada en el supuesto que la modelación de fenómenos o situaciones dinámicas podía favorecer el desarrollo del razonamiento. A partir que se comparte el marco en 2002, otras investigaciones se fundamentaron de las mismas ideas.

A partir de lo anterior, en las últimas décadas se ha demostrado que es posible favorecer el aprendizaje de diversos conceptos matemáticos cuando se estudian desde el punto de vista covariacional.

Posteriormente, en 2017 Thompson & Carlson presentaron un nuevo marco del razonamiento covariacional fundamentado desde la variación (Castillo-Garsow, 2012). Los investigadores retomaban gran parte de las ideas de Carlson et al. (2002) pero argumentaban que su marco no era suficiente para analizar y describir las respuestas de estudiantes al trabajar en situaciones que involucraban la covariación de cantidades, y ampliaron los niveles del marco, que nombraron: sin coordinación, precoordinación de valores, coordinación gruesa de valores, coordinación de valores, variación continua gruesa y variación continua suave.

Es importante mencionar que a pesar que la mayoría de investigaciones incluyen actividades basadas en situaciones reales para indagar en el razonamiento de estudiantes, no muestran con claridad el papel que tienen estos escenarios, por lo que, el supuesto que menciona que la modelación de fenómenos o situaciones dinámicas favorece el desarrollo del razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002) no ha sido sustentado con claridad en investigación en matemática educativa.

En ese sentido, compartimos la idea que la modelación de situaciones dinámicas es un medio que permite reconocer la variación, la relación entre variables y la covariacion de variables (Carlson et al., 2002), si se sustenta teóricamente el papel de la modelación como medio. En particular, pensamos que el desarrollo del razonamiento covariacional puede ofrecer un nuevo significado al concepto función (Oehrtman & Thompson, 2008), permitiendo la visualización de la coordinación de cantidades, y que asociar contextos a los significados matemáticos con ayuda de la modelación proporciona una visión clara sobre la conexión entre las matemáticas en el mundo real, lo que puede favorecer su comprensión.

Fundamentando la idea anterior, realizamos un estudio previo como parte de un proyecto de tesis (Martínez-Sierra & Vargas, 2020) que demuestra que es posible trabajar con la modelación matemática desde la perspectiva realista (Blum & Borromeo, 2009) y el razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017), en la investigación se hacía explicito el papel de la modelación matemática como proceso cognitivo cuando estudiantes universitarios razonaban covariacionalmente, sobre la base del estudio, proponemos que con la modelación matemática desde la perspectiva escolar (Zbiek & Conner, 2006) como medio se desarrolle una concepción covariacional del concepto función en estudiantes de bachillerato y universidad.

Preguntas de investigación

La revisión anterior, muestra como el constructo teórico del razonamiento covariacional resulta útil para el estudio de diversos temas en Cálculo y Trigonometría, y cómo su desarrollo influye en el aprendizaje de conceptos, tal como el concepto función.

Asimismo, que el concepto función es esencial para comprender conceptos centrales del cálculo y debido a su importancia, pensamos que desde el marco reportado por Thompson & Carlson (2017) es posible estudiar diferentes tipos de funciones bajo el punto de vista covariacional, ya que, las funciones son un tema transversal en todos los currículos escolares de matemáticas avanzadas.

Además, proponemos a la modelación matemática como medio el desarrollo del razonamiento covariacional, atendiendo el supuesto que la modelación de situaciones dinámicas favorece el desarrollo del razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002). Consideramos pertinente retomar dicho supuesto, tratando de atender dificultades asociadas al concepto, como las que experimentan estudiantes con respecto a las relaciones funcionales al no tener la capacidad de razonar de manera variable o covariacional (Thompson & Carlson, 2017), o bien, que sólo conciben a las funciones en términos de manipulaciones simbólicas y técnicas de procedimiento, y por tanto, no pueden comprender forma más general del concepto, por lo que, carecen de estructuras conceptuales relacionadas a este (Antonini, Baccaglini-Frank, & Lisarelli, 2020).

En esta dirección, para funciones en particular como el caso de las exponenciales y trigonométricas, que son estudiadas mayormente en un plano algorítmico o procedimental, y que carecen de contexto y significado en su aprendizaje (Moore, 2014; Kertil, Erbas, & Cetinkaya, 2019) proponemos que con ayuda del razonamiento covariacional se pueda fortalecer su entendimiento matemático y que modelación de situaciones reales sea el medio para su desarrollo.

Basado en lo anterior, proponemos que otras funciones que son estudiadas desde educación básica hasta educación superior como las lineales y cuadráticas, y que por tanto, resultan relevantes para la investigación, también se estudien con ayuda de ambos marcos.

En síntesis, el interés de la investigación en curso se sitúa en proponer a la modelación matemática (Zbiek & Conner, 2006) de situaciones reales, desde la perspectiva escolar como medio para el desarrollo del razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017) con la intención final de desarrollar una concepción covariacional del concepto función.

Finalmente, planteamos las interrogantes ¿Cómo un proceso de modelación matemática escolar influye en el desarrollo de la concepción covariacional del concepto función?, ¿Qué niveles de razonamiento covariaconal desarrollan estudiantes de bachillerato y universidad cuando modelan situaciones dinámicas? Y, ¿Cuál es la relacionan entre los constructos teóricos razonamiento covariacional y modelación matemática escolar cuando trabajan en conjunto?

Elementos teóricos

Con base en lo anterior, sustentamos la investigación en curso desde los constructos teóricos, razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017) y modelación matemática desde la perspectiva escolar (Blum & Niss, 1991; Zbiek & Conner, 2006), dado nuestro interés por desarrollar la concepción covariacional del concepto función.

Razonamiento covariacional

El razonamiento covariacional se concibe como la capacidad cognitiva para visualizar dos cantidades variables de forma simultánea (Thompson & Carlson, 2017). Desde esta perspectiva, el razonamiento covariacional es evolutivo, y se desarrolla en seis niveles: sin coordinación. precoordinación de valores, coordinación gruesa de valores, coordinación de valores, variación continua gruesa y variación continua suave. Para fines de esta investigación, retomamos el razonamiento covariacional desde la perspectiva de Thompson & Carlson (2017), en la cual, profundizaremos durante el darrollo de la investigación.

Modelación matemática

La modelación matemática se aborda desde la perspectiva escolar (Kaiser & Sriraman, 2006; Kaiser, 2017; Abassian, Safi, Bush, & Bostic, 2019), de acuerdo con Kaiser y Sriraman (2006) esta perspectiva resalta la relación entre el mundo real y las matemáticas como un elemento vital en su enseñanza y aprendizaje. Además, que utiliza contextos para desarrollar conceptos matemáticos, que conducen a la modelación (Zbiek & Conner, 2006).

La modelación escolar es un proceso que se describe como una SMR triple, donde la S representa "alguna situación de problema real", M representa "una colección de entidades matemáticas" y R representa "alguna relación por la cual los objetos y las relaciones de S están relacionados a objetos y relaciones de M" (Blum & Niss, 1991, p.39) así como se muestra en la Figura 1.

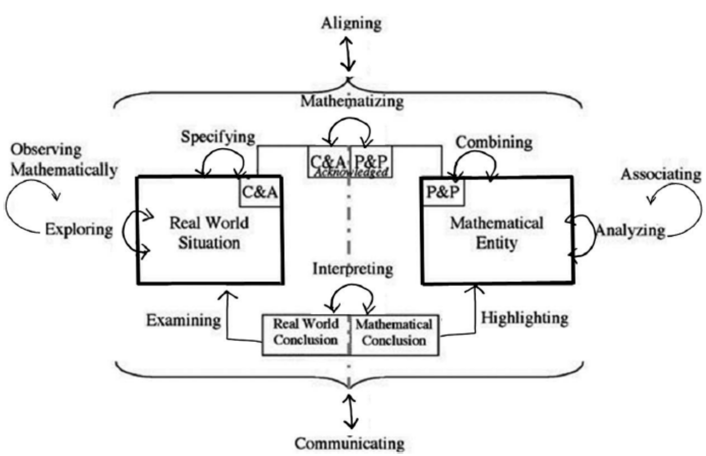


Figura 1. Ciclo de modelación desde la perspectiva escolar (Abassian et al., 2019, p.6)

Metodología

Se pretende realizar un estudio de casos (Yin, 2009) que permita evidenciar cómo la modelación matemática escolar (Zbiek & Conner, 2006) permite el desarrollo del razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017) y cómo su desarrollo facilita el aprendizaje de las funciones en diferentes niveles educativos.

Proponemos el diseño de un experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000) que involucre tareas de modelación, desde la perspectiva de modelación escolar. Las tareas, desde la perspectiva de modelación matemática escolar, tienen el objetivo de motivar la necesidad de aprender matemáticas (Abassian et al., 2019), pensamos en tareas que involucren situaciones reales y que permitan que emerja el trabajo con las funciones: lineal, cuadrática, trigonométricas y logaritmo-exponenciales. De modo tal, que la estructura de la tarea se guíe hacia construcción de modelos matemáticos donde sea posible visualizar la coordinación de dos cantidades.

Consideramos pertinente recolectar datos a través de grabaciones de audio y video y producciones escritas, además, realizar entrevistas con preguntas semiestructuras para indagar en el razonamiento de los estudiantes de bachillerato y universidad, posterior a la implementación del experimento de enseñanza.

Descripción tentativa de resultados

Se espera que la modelación matemática y el razonamiento covariacional trabajen en conjunto como marcos cognitivos para esta investigación, evidenciando con claridad el papel que tiene la modelación en el desarrollo del razonamiento covariacional al estudiar diferentes funciones. De modo tal, que la investigación en curso considera áreas de oportunidad para hacer investigación en matemática educativa que se sugieren en otras investigaciones ubicadas principalmente en la línea de razonamiento covariacional (Moore et al., 2013; Moore, 2014; Ellis, Özgür, Kulow, Williams, & Amidon, 2015; Kertil et al., 2019) propuestas para el estudio de diferentes funciones.

Referencias bibliográficas

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2019). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53–65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Antonini, S., Baccaglini-Frank, A., & Lisarelli, G. (2020). From Experiences in a Dynamic Environment to Written Narratives on Functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6*(1), 1–29. https://doi.org/10.1007/s40751-019-00054-3

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Blum, W., & Niss, M. (1991). applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37–68.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. *Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context*, 55–73.

Confrey, J. (1991). *The Concept of Exponential Functions: A Student's Perspective* (Steffe L.P). https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3178-3_8

Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C. C., & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 135–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004

Kaiser, G. (2017). The teaching and learning of mathematical modeling. *Compendium for Research in*

Mathematics Education, 267–291.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kertil, M., Erbas, A. K., & Cetinkaya, B. (2019). Developing prospective teachers' covariational reasoning through a model development sequence. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(3), 207–233. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1576001

Martínez-Sierra, G., & Vargas Ramos, A. L. *Centro de Investigación en Matemática Educativa*. , (2020).

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002

Oehrtman, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education*, 27–42. https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.004

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Research Design in Mathematics and Science Education*, 267–307.

Thompson, P. W. (1988). Quantitative concepts as a foundation for algebra. *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*(January 1988), 163–170.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, Covariation and Functions: Foundation ways of thinking mathematically. *Compendium for Research in Mathematics Education*, (January), 421–456.

Yin, R. (2009). Case study research: Design and methods. *The Canadian Journal of Action Research*, *14*(1), 69–71. https://doi.org/10.33524/cjar.v14i1.73

Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(1), 89–112. https://doi.org/doi:10.1007/s10649-005-9002-4

Innovación para la enseñanza de la función exponencial desde la modelación-covariación [1]

Juana Alicia Rojas-Estrada[1]
María Esther Magali Méndez-Guevara

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas
Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

En este escrito se reporta los avances de una investigación en curso, que pretende caracterizar la función exponencial a través de la modelación y la covariación. Dada la naturaleza cualitativa de este proyecto, se realizaron cuatro actividades matemáticas del experimento de enseñanza sustentado por la modelación y covariación, en donde se postula que mediante las prácticas de modelación escolar se desarrolla del razonamiento covariacional. Se reportan los resultados la primera actividad matemática que forma parte del experimento de enseñanza realizado a alumnos del nivel medio superior en la Preparatoria No. 2 de la Universidad Autónoma de Guerrero, donde se vislumbra que las prácticas de modelación los llevaron al desarrollo del nivel cuatro del razonamiento covariacional.

En la enseñanza del cálculo existen varios conceptos y esta investigación se interesa en problematizar el de función. Una secuencia didáctica común de los programas de estudios y libros de texto es que el profesor hace un ejemplo estándar utilizando una variedad de representaciones de la función al explicar a los estudiantes, luego supone que los estudiantes deben seguir el ejemplo al hacer una tarea similar, y así apropiarse de las representaciones emblemáticas de la función (expresiones, gráficos, tablas de números), esto no permite a los estudiantes aprender o imaginar cuáles son las características que distinguen a las distintas funciones. Este tipo de enseñanza provoca una falta de comprensión de la naturaleza de los objetos matemáticos y por ende inhibe su uso para resolver un problema de cálculo (Schwarz y Dreyfus, 1995; Slavit 1997; Dreyfus, 1999, Bloch, 2003).

Los estudios que giran en torno a la capacidad de interpretar el significado de una función al modelar una situación dinámica en la que el estudiante se enfrente a una toma de decisiones sobre las variables y parámetros que controlan una determinada situación, requiere atención a cómo una de las variables cambia mientras se imagina cambios de cantidades sucesivas en la otra variable de la función, esta acción mental se ha denominado razonamiento covariacional (Thompson, 1994a; Carlson, 1998; Carlson, Oehrtman, & Engelke, 2010), esto ha sido documentado para representar e interpretar la naturaleza cambiante de las cantidades en una amplia gama de situaciones funcionales y para comprender los conceptos principales del cálculo, como el de función (Carlson, Jacobs, Coe,

[1] Los autores de este manuscrito pertenecen al grupo de investigación de la maestría “Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas” de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, integrado por la profesora del núcleo básico la Dra. María Esther Magali Méndez Guevara y dos estudiantes de este posgrado la Lic. Karen Zúñiga González y la Lic. Juana Alicia Rojas Estrada.

Larsen & Hsu, 2002; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic, 1996; Kaput, 1992; Thompson, 1994 a,b; Zandieh, 2000).

Además, durante el proceso de modelación, surge espontáneamente representaciones no institucionales y se considera que puede ayudar a los estudiantes a captar mejor la noción de covariación, permitiéndoles entender mejor la representación gráfica de funciones (Hitt & González-Martín, 2015).

Con base en las aportaciones realizadas sobre la covariación (Saldahna & Thompson (1998), Thompson (1994 a,b), Confrey & Smith (1994, 1995), Carlson (1998)) se define el razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (Carlson et al., 2002).

Así mismo, adoptamos la postura de la categoría de modelación escolar desde la socioepistemología, en tanto es necesario generar marcos apropiados a la matemática escolar que promuevan la construcción continua de conocimiento, donde se propone la categoría de modelación escolar. El núcleo o corazón de esta categoría provoca que emerja el uso de tablas de datos, uso de gráficas y de expresiones analíticas como herramientas que permiten estudiar y explicar la variación local o global, a través de conjeturar sobre la tendencia o mediante caracterizar el comportamiento de intervalos de variación, (Tocto y Méndez, 2015; Méndez y Cordero, 2014).

De lo anterior decimos que la modelación y la covariación forman parte del sustento teórico de la investigación, tomando principalmente la hipótesis que el razonamiento covariacional puede desarrollarse mediante prácticas de modelación. Para esto, el grupo de investigación propone una, como aquella que nos permitirá dar evidencia de este comportamiento, al estudiar situaciones de variación que involucran dos cantidades simultáneamente cambiantes a partir de las prácticas de modelación puestas en juego, fusionando los constructos teóricos de la modelación y covariación.

De esta manera es como se pretende generar una innovación en la práctica docente desde la unión de dos constructos teóricos, modelación y covariación, hasta la manera en cómo se aborda al conocimiento matemático, al mostrar evidencias de la hipótesis al caracterizar a la función exponencial en la matemática escolar.

Método

Para la elaboración de la actividad matemática se implementó la metodología de investigación basada en diseño, paradigma metodológico que actualmente es muy útil en el campo de la didáctica de las ciencias. Específicamente, se realizó un experimento de enseñanza, este instrumento metodológico consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Por lo que se elaboró un experimento que consta de cuatro diseños instruccionales, es decir, actividades matemáticas en donde participó el grupo de investigación formado por dos profesoras en formación y una profesora-investigadora, quienes han formulado una articulación entre la modelación-covariación y se ha discutido los experimentos de enseñanza, así como cada uno de los diseños instruccionales de dos investigaciones en proceso.

Es preciso mencionar que en este reporte sólo se hace análisis de la actividad 1, del experimento de enseñanza, que en concreto permite introducir a los estudiantes en el análisis covariacional desde la modelación de la relación de la variación del número de palillos utilizados con el número de hexágonos formados de una sucesión de figuras.

Su implementación se realizó en un grupo de 32 estudiantes que cursaban la unidad de aprendizaje 'Matemáticas I: Álgebra' que es parte de la etapa de formación básica del primer semestre del nivel medio superior en la Preparatoria No. 2 de la Universidad Autónoma de Guerrero. Donde 19 de los estudiantes son mujeres y 13 son hombres, y sus edades oscilan entre los 14 y 15 años. Para la recolección de datos se contó con la técnica de videograbación de la clase.

Resultados

Para el análisis de los datos se ha sintetizado la producción de los siete equipos, algunos equipos logran identificar que el número de palillos utilizados cambiará dependiendo del número de hexágonos que se les pide y desde ahí se vislumbra una forma de promover la covariación motivado por las prácticas de modelación, al observar e interpretar el cambio de las variables, esto se evidencia cuando en los tres primeros casos que están observando perciben que para conocer el número total de palillos suman los lados del hexágono y luego restan el lado donde se unen los hexágonos.

Luego, postulan que la cantidad total de palillos dependerá del número de hexágonos que se formaban, es decir, que llegaron a coordinar el cambio de una variable respecto a la otra, al determinar que para conocer el total de palillos utilizados se multiplica el número de hexágonos formados por el número de lados de un hexágono menos los lados donde se unen los hexágonos, esto correspondía al número de hexágonos formados menos uno. Pese a que describían cómo era el cambio de estas variables se les dificultó pasar del lenguaje común al algebraico.

Conclusiones

En la investigación se buscó desarrollar el razonamiento covariacional a partir de prácticas de modelación, para esto se diseñó una situación basada en la modelación escolar que provocaría dicho desarrollo. El uso de las prácticas de modelación jugó un papel fundamental ya que generaron argumentos para describir el comportamiento de la situación, promoviendo el desarrollo del razonamiento covariacional, lo cual lo podemos vislumbrar por los niveles alcanzados en esta actividad, a partir del análisis de las variaciones relacionadas con los palillos utilizados y el número de hexágonos formados.

Referencias bibliográficas

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics, 52*, 8–28.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1*, 7, 115-162.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33,* 352–378.

Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understanding. *Cognition and Instruction, 28*(2), 113–145.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational studies in mathematics, 26*, 135-164.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for research in mathematics education, 26*(1), 66-86.

Cotrill, J., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics 38*, 85–109.

Hitt, F. & González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics, 88,* 201-219.

Kaput, J. (1992). Patterns in students' formalization of quantitative patterns. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.): *The concept of function aspects of epistemology and pedagogy*, *MAA Notes 25,* (pp. 290-318). Mathematical Association of America.

Méndez, M. y Cordero, F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 27, (pp.1603-1610). México. Colegio de Matemáticas Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29*(1), 75-88.

Saldanha, L. & Thompson, P. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.) *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education, 1,* (pp.298-304). Raleigh, NC: North Carolina State University.

Schwarz, B. & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematic, 29,* 259-291.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics 33*(3), 259–281.

Thompson, P. (1994a). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 229–274.

Thompson, P. (1994b). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. *Research in Collegiate Mathematics Education, 1*(4), 21–44.

Tocto, M. y Méndez, M. (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En F. Rodríguez & R. Rodríguez (Eds.) Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa (pp. 226-231). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Zandiehm, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education, 8*, 103-127.

Desarrollo del razonamiento variacional a través de la modelización en alumnos de tercer grado de secundaria

Selene Moreno Sandoval
Angelina Alvarado Monroy

Universidad Juárez del Estado de Durango
Facultad de Ciencias Exactas

Palabras clave: Razonamiento Variacional, Actividades de Modelización, Simulaciones Participativas, Actividad Colectiva, Educación Secundaria

Introducción y referentes teóricos

Uno de los grandes retos que enfrenta un docente es lograr que los estudiantes se interesen por una situación que presenta variación, para desarrollar y refinar el conocimiento matemático e interpretarlo. Partiendo de este desafío, la presente investigación se centra en el estudio de la variación como un fenómeno que involucra diferentes conceptos, procesos y representaciones matemáticas que inician su estudio en el nivel secundaria. Se considera importante dicho fenómeno, dado que aparece de manera natural en una gran variedad de contextos del entorno cercano a los estudiantes. Para León (2017), la variación cobra más importancia si se recuerda que el saber matemático es un saber vivo y que está en constante búsqueda de relaciones, aunado a ello, considera que la interpretación de las situaciones con variación se puede hacer en contextos no escolares, los cuales se presentan de manera más significativa para los educandos, en ejemplos tan comunes como: el nivel de la lluvia, los cambios en la temperatura o la modificación anual del valor del salario mínimo en el país.

Entendiendo el panorama, se ve reflejada la necesidad de favorecer la comprensión y capacidad de análisis de los estudiantes respecto a modelos matemáticos en el aula, que presentan patrones de cambio en sistemas dinámicos, de ello, el NCTM (2000), hace una especial mención en la oportunidad que deberían de tener todos los educandos de usar modelos matemáticos para representar relaciones cuantitativas, sin embargo, indican que con regularidad la noción de cambio es incomprendida, aun después de estudiar la materia de cálculo diferencial. De lo anterior, Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2002) proponen un marco conceptual para estudiar el razonamiento variacional y usarlo para que los estudiantes logren comprender situaciones dinámicas que involucran dos cantidades que cambian de manera simultánea; mismo que posteriormente, fue refinado por Thompson y Carlson (2017) para lograr caracterizar la capacidad de una persona al momento de razonar sobre la variación simple y coordinada, aclarando que un nivel del marco utilizado para definir el comportamiento de una persona da la confianza de que pueda razonar en todos los entornos en el nivel implicado. Por su parte, Stroup (2014) recalca la importancia de enfatizar y desarrollar de manera temprana los aspectos cualitativos de los procesos de cambio a través de simulaciones participativas que permitan a los estudiantes interactuar con sistemas dinámicos cercanos a su contexto.

Con la motivación de la información de las investigaciones antes mencionadas y del contexto en el cual se tiene incidencia, se pretende realizar un experimento de enseñanza y tratar de responder a la pregunta guía: cómo se favorece el desarrollo del razonamiento variacional en jóvenes de secundaria, vislumbrando a la modelización como una vía de acceso y conexión de la realidad inmediata con el conocimiento matemático. En esta dirección, Carlson, Larsen y Lesh (2003), han mostrado estudios iniciales sobre la mejora de la instrucción de la variación a través de actividades de modelización (AM), lo cual da pie a pensar que se puede trabajar con este tipo de actividades desde temprana edad para evitar dificultades en la comprensión de la relación entre variables en años posteriores cuando el educando tiene su encuentro con el cálculo diferencial e integral.

Tanto Cantoral (2004), como Vasco (2006), puntualizan en la relevancia de las actividades que habrán de sugerirse para propiciar el desarrollo del razonamiento variacional, por ello, toma fuerza el empleo de la modelización matemática como un proceso que conlleva la matematización de una situación para poder interpretarla. En este trabajo específicamente, se abordarán dos aproximaciones de modelización: la perspectiva contextual de modelos y modelación (PMM) en educación matemática de Lesh y Doerr (2003) y las simulaciones participativas (SP) en NetLogo que provocan el surgimiento de modelos emergentes (Stroup, 2014; Stroup, Ares, Hurford y Lesh, 2007).

En armonía con los principios de diseño sugeridos desde la PMM (Lesh y Doerr, 2003) en esta investigación se proponen actividades cuyo contexto cercano a los estudiantes es la propagación de una enfermedad altamente contagiable al contacto en una comunidad indígena, provocando el análisis de la situación para tratar de comprender los factores que están involucrandos en el control de contagios en la población y la necesidad de educar a los jóvenes en este tipo de situaciones, lo cual permiten conducir a formas significativas del aprendizaje de la variación.

Por su parte las SP brindan un ambiente interactivo altamente participativo a través de software que permite generar redes inálambricas en las cuales los estudiantes son agentes activos dentro de un sistema dinámico (e.g. NetLogo con HubNet) y esto les da la oportunidad para explorar y construir modelos de fenómenos emergentes. Al trabajar con dichos modelos, los estudiantes establecen conexiones entre los niveles *micro* de los agentes que siguen reglas, patrones y regularidades y los *macros* que constituyen el mundo de los fenómenos naturales y sociales (Wilensky, 2000). En este trabajo, las SP son utilizadas como medio para abordar el problema propuesto en las AM del escaso o nulo acceso a la atención médica en los pueblos indígenas, situando a los estudiantes en dos escenarios principales referentes a la propagación de una enfermedad transmisible al contacto: a) población sin atención médica y, b) habitantes con acceso a la atención médica.

Para las actividades grupales, la metodología empleada está guiada bajo orientaciones teóricas que apoyan la documentación colectiva, utilizando el modelo de argumentación de Toulmin (1969: citado en Rasmussen & Stephan, 2008). A través de dicha documentación, se pretende mostrar cómo al interactuar con las simulaciones los estudiantes crean consciencia de la situación planteada en las AM y evidencian el desarrollo del razonamiento variacional que para Carlson et al. (2002) se define como «las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra» y para Thompson y Carlson (2017) transita en cinco niveles de desarrollo: los primeros tres que van desde la no coordinación, pre-coordinación, coordinación gruesa y coordinación de valores; y, los dos últimos tratan con la variación coordinada continua a tramos y la coordinada continua suave.

Metodología

En el experimento de enseñanza se llevaron a cabo dos ciclos de investigación para producir el diseño didáctico e indagar cómo favorece el razonamiento variacional en estudiantes de educación secundaria. El *ciclo de anticipación*, se llevó a cabo con 8 docentes con experiencia en la modelación en el aula que anticiparon lo que pudiera suceder con los estudiantes. Dicha mirada permitió realizar un primer refinamiento del diseño concebido inicialmente -como corresponde a la metodología basada en el diseño (Cobb & Gravemejier, 2008), se da un *análisis prospectivo* en la primera fase y representa la experiencia, los intereses y el contexto de quien conduce este estudio, además de integrar un inventario de posibles soluciones y anticipar un sistema conceptual emergente.

El *ciclo de implementación en el aula* se realizó con estudiantes de tercer grado de una Escuela Secundaria Técnica ubicada en un poblado al norte del Estado de Durango, México. El contexto es rural, siendo el principal sustento de la población la agricultura y la ganadería, además de existir un movimiento importante de migración hacia Estados Unidos de América, por lo cual los padres de familia de algunos estudiantes se encuentran laborando en dicho país y envían remesas con la finalidad de mejorar la calidad de vida de los jóvenes.

Cabe destacar que en cada uno de los ciclos se pasa por etapas de: concepción, prueba y refinamiento. Finalmente, se realiza la última fase de la metodología, es decir el *análisis retrospectivo*, mismo que se centra en analizar la experiencia vivida en los ciclos, además del análisis prospectivo.

Los datos fueron recolectados mediante videograbaciones del trabajo en los grupos, las producciones escritas de los participantes y las capturas de las diferentes simulaciones emergentes. Las interacciones colectivas fueron analizadas mediante el modelo de argumentación de Toulmin (Rasmussen y Stephan, 2008) y los niveles de Thompson y Carlson (2017) para caracterizar la capacidad de una persona al momento de razonar sobre la variación coordinada.

Resultados preliminares

Se analizaron las múltiples interacciones entre los participantes, como agentes activos dentro de las simulaciones participativas, las cuales provocaron el surgimiento de modelos emergentes (Gravemejier, 1999) que fueron objeto de múltiples discusiones y cuya finalidad era el refinamiento de los mismos. La abstracción del modelo matemático ocurrió desde la observación de los patrones para rescatar información relativa a la estructura emergente y así aproximarse a la descripción matematizada de la realidad presentada en los contagios de una enfermedad en la situación a), y b), evidenciando de esta manera el razonamiento variacional cuya importancia radica en que los estudiantes lograron construir un sentido de las situaciones sobre qué, cómo y por qué estaba sucediendo de esa manera. Además fue posible observar a lo largo de la presentación de resultados, que las actividades de modelización apoyadas en las SP para su desarrollo, permitieron ir desencadenando acciones matemáticas en los estudiantes en donde se revela su razonamiento en torno a la idea fundamental de variación, pues fueron refinando los modelos que ellos mismos proponían, de modo que sus predicciones lograron acercarse a los modelos emergentes que surgían luego de interactuar con NetLogo en la SP. Es relevante puntualizar que el aprendizaje, y en este caso el desarrollo del razonamiento variacional, no se da propiamente en un entorno lineal, dado que exhibían acciones que permitían ubicarlos en alguno de los niveles de razonamiento variacional y saltar más de un nivel o bien retroceder en un siguiente momento. Esto apoya las afirmaciones de Lesh y Doerr (2003) sobre la característica de inestabilidad en el desarrollo de los modelos o sistemas conceptuales, así hechos y observaciones que surgieron en algún momento pueden ser olvidados en un posterior momento al adoptar una perspectiva diferente.

Por otra parte, el análisis de la actividad colectiva (Rasmussen y Stephan, 2008) presentada a lo largo de los resultados, permitió darle un valor especial al trabajo colaborativo que desarrollaron los jóvenes en donde se pudo observar que la consolidación de ideas, se logró gracias al intercambio de opiniones en donde de forma conjunta, se dirigieron al establecimiento de prácticas matemáticas, asociadas con la variación, propiciando la movilización de niveles que los llevó a exhibir un logro en 9 de 18 estudiantes al llegar a un modelo generalizable de la situación que involucraba la comprensión de la pendiente exhibiendo acciones relacionadas con un nivel de consolidación de la variación coordinada continua a tramos. Mientras que, del resto de los estudiantes, 4 de 18 mostraron acciones de aproximación y 5 de 18 exhibieron acciones de seguimiento en el mismo nivel de variación coordinada continua a tramos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. U. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,17,* 1 -9

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, E., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33,5, 352 - 378.

Carlson, M., Larsen, S., y Lesh, R. (2003). Integrating a Models and Modeling. En Lesh, R., Doerr, H. *Beyond construtivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 465 - 478). Mahwan, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, En A. Kelly, R. Lesh y J. Baek (eds). *Handbook of Design Research Methods in Education. Innovations in Science,* *Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning,* 1(2), 155–177.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective in Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Servicio de publicaciones de la S.A.E.M. Thales.

Rasmussen, C., y Stephan, M. (2008). A methodology for documenting collective activity. En A. Kelly, R. Lesh, y J. Baek (Eds.), *Handbook of innovative design research in science, technology, engineering, mathematics (STEM) education* (pp. 195–215). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

León, C. (2017). El pensamiento covariacional y GeoGebra: herramientas para la explicación científica de algunas realidades. *Tecné, Episteme y Didaxis, TED,* 42, 159-171.

Stroup, W., Ares, N., Hurford, A., y Lesh, R. (2007). Diversity- by- design: The why, what, and how of generativity in next- generation classroom networks. En R. Lesh, E. Hamilton, y J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education*. (pp.367- 393). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stroup, W. y Wilensky, U. (2014). On the Embedded Complementarity of Agent-Based and Aggregate Reasoning in Students Developing Understanding of Dynamic Sistems. *Tech Know Learn*, 19 -52.

Thompson, P.W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: NCTM.

Vasco, C. E. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Cali, Colombia: Universidad del Valle, Universidad de Manizales.

Wilensky, U. (2000). *Modeling Emergent Phenomena with StarLogoT*. @Concord.org.

La Modelación y Covariación en la Significación de Funciones Polinómicas. Exploración de la Función de Primer Grado

Karen Zúñiga González
María Esther Magali Méndez Guevara

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas
Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

Se muestran los avances de una investigación en proceso, la cual versa sobre la significación de las funciones polinómicas (primer, segundo y tercer grado) mediante la modelación y los niveles de razonamiento covariacional. Para lo cual se ha elaborado un experimento de enseñanza que consta de tres diseños de actividades matemáticas basadas en la categoría Socioepistemológica de modelación escolar, la cual promueve el análisis del desarrollo de niveles de razonamiento covariacional en estudiantes de nivel medio superior. Se reporta los alcances de una de las actividades matemáticas, sobre función de primer grado con estudiantes de nivel medio superior.

Palabras clave: Covariación, modelación escolar, experimento de enseñanza, función de primer grado

Estudios realizados en muchos países indican que los problemas con el aprendizaje de las matemáticas no son de orden local o regional, sino de orden mundial (Artigue, 2000). Las matemáticas se enseñan de manera masiva, descontextualizada y algoritmizada, lo que convierte su aprendizaje en un proceso formal, ligado a una serie de reglas, axiomas, postulados y teoremas, constituyendo estos aspectos un fin en sí mismo lejos de la realidad cotidiana (Salinas y Alanís, 2009). Esta forma de enseñanza de las matemáticas ha ido afectando a sus diversas áreas de estudio, el área que interesa en esta investigación es el Cálculo.

Moreno y Ríos (2006) destacan dos visiones sobre la enseñanza del Cálculo: la *visión tradicional* y la *visión moderna*. La primera visión se enmarca una concepción clásica de la enseñanza, donde el énfasis se coloca en la memorización de técnicas y reglas que no tienen vinculación con la realidad y dan la impresión de que la matemática sólo existe en el momento de la clase. Y la segunda visión, llama la atención a que se debe hablar del aprendizaje como construcción de significados para que el estudiante construya el conocimiento de acuerdo con su contexto y en las orientaciones provenientes del profesor.

El interés, se ha puesto en esta segunda visión de la enseñanza del cálculo, en donde se busca proponer situaciones de aprendizaje para la matemática escolar en donde se signifiquen saberes matemáticos, en específico sobre funciones.

De las teorías perteneciente a la Matemática Educativa, reconocemos los aportes hacia el Cálculo en la línea de investigación de la covariación y del razonamiento covariacional, el primero es la relación de dos cantidades que varían simultáneamente y el segundo es una herramienta para saber el nivel del entendimiento de la covariación (ver tabla 1), en tanto que ambos permiten la comprensión de la noción de función (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Ferrari, Martínez y Méndez, 2016; Thompson y Carlson, 2017).

TABLA 1. *Niveles principales de razonamiento covariacional*

Nivel	Descripción
Covariación continua suave	La persona visualiza aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como ocurriendo simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y la persona visualiza que ambas variables varían de manera suave y continua.
Covariación continua gruesa	La persona imagina que los cambios en el valor de una variable suceden simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, y visualizan que ambas variables varían con una variación continua gruesa.
Coordinación de valores.	La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y).
Coordinación gruesa de valores	La persona forma una imagen gruesa de los valores de las cantidades que varían juntas, como "esta cantidad aumenta mientras que la cantidad disminuye". La persona no imagina que los valores individuales de las cantidades van juntos. En cambio, la persona visualiza un vínculo suelto y no multiplicativo entre los cambios generales en los valores de dos cantidades.
Pre-coordinación de valores	La persona imagina que los valores de dos variables varían, pero de forma asincrónica: una variable cambia, luego cambia la segunda variable, luego la primera, y así sucesivamente. La persona no anticipa crear pares de valores como objetos multiplicativos.
Sin coordinación	La persona no tiene imagen de variables que varían juntas. La persona se enfoca en la variación de una u otra variable sin coordinación de valores.

Nota: Tomada de Thompson y Carlson, 2017.

Así como los aportes de la línea de modelación, en particular la categoría de modelación escolar (Méndez y Cordero, 2012; Méndez 2013) basada en principios teóricos Socioepistemológicos, concibiéndola como un proceso de construcción y desarrollo de usos de conocimiento matemático, en tanto permite el estudio del comportamiento de situaciones de variación a través de prácticas de modelación (observar, tomar decisiones, interpretar, organizar, especular, calcular, ajustar, postular, adaptar y consensuar, entre otras) (ver figura 1).

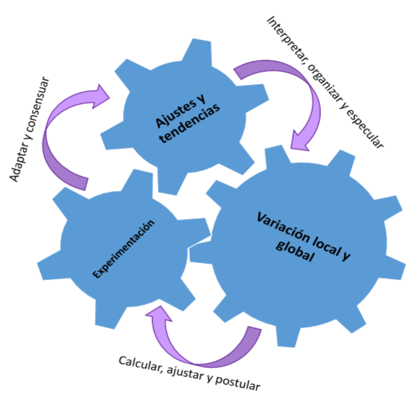


Figura 1: El núcleo de la categoría de modelación (tomado de Méndez, 2013. P.61)

Partiendo de este antecedente, nuestra hipótesis es que las prácticas de modelación orientan el desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional, para dar evidencia de ello se hace una propuesta de experimento de enseñanza, teniendo como objetivo la significación de las funciones polinómicas (primer, segundo y tercer grado) mediante la modelación y los niveles de razonamiento covariacional.

Este reporte muestra una exploración de la primera actividad matemática que tiene como objetivo particular significar a la función de primer grado a partir de una situación de llenado de recipientes cilíndricos, este ha permitió reflexionar sobre cómo mediante la modelación del llenado de recipientes se comprende la covariación de dos variables y en qué niveles de razonamiento covariacional se alcanzan.

Método

Para el desarrollo de este proyecto se ha elaborado un experimento de enseñanza, que se enmarca en la metodología de investigación de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), estos se caracterizan por ser la ruptura entre docente e investigador, y consisten en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores.

En la ejecución de los experimentos de enseñanza, se distinguen tres fases: 1) Preparación del experimento; 2) Experimentación para promover el aprendizaje, aquí se tiene lugar a las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones del ciclo de tres pasos: diseño y formulación de hipótesis, intervención en el aula y recogida de datos, y análisis de los datos, revisión y reformulación de hipótesis; 3) Ejecución del análisis retrospectivo de los datos.

Diseño de la investigación

A continuación, se muestran las fases desarrolladas hasta este momento.

Fase 1. Para esta fase se han diseñado tres actividades matemáticas (AM) (ver figura 2), basadas en la modelación y cada una tiene un objetivo particular.

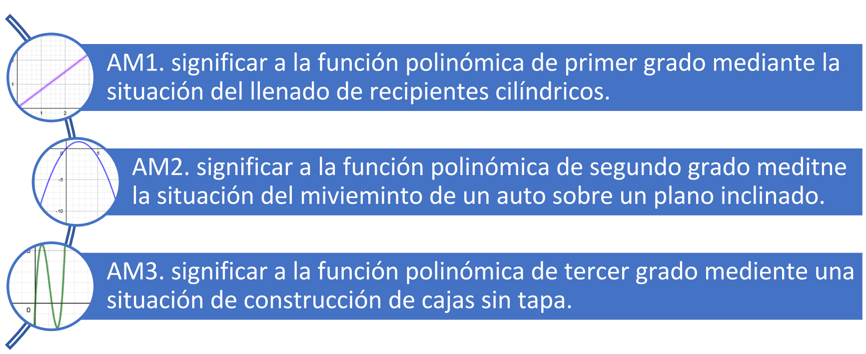


Figura 2. Actividades Matemáticas del experimento de enseñanza

Uno de los elementos claves de la fase de preparación, es definir la secuencia de intervenciones y su temporalidad además de delinear la trayectoria hipotética de aprendizajes esperados, en este caso tienen que ver con los niveles del razonamiento covariacional. Esto se ha realizado y será fundamental para el análisis de los datos.

Fase 2. Se llevó a cabo la exploración de la AM1 "comunicando el llenado de recipientes" y son los resultados se reportan. Esta tuvo lugar en el aula donde los estudiantes toman habitualmente sus clases, se realizaron 2 sesiones de 50 minutos cada una, las cuales fueron videograbadas y se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes.

Participantes

Esta primera exploración en el contexto escolar se llevó a cabo con 9 estudiantes (8 mujeres y 1 hombre, que oscilaban entre los 14 y 15 años) de nivel medio superior de la Preparatoria No. 2 de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), los cuales se entraban cursando la asignatura de Matemáticas II, correspondiente al segundo semestre. Para llevar a cabo la actividad se les hizo la solicitud que conformaran en 2 equipos, uno de 4 y otro de 5 integrantes.

Resultados

A continuación, se muestra como se ha ido realizado el análisis de los datos hasta el momento, en donde se han identificado niveles de razonamiento covariacional alcanzados por el equipo 1 y las prácticas de modelación con las que se alcanzó dicho desarrollo.

En tabla 2, se muestran argumentos denotados por el nivel Sin coordinación en cual se desarrolló mediante las prácticas de modelación: observar, interpretar y organizar las variables y condiciones de la experimentación.

TABLA 2: *Nivel Sin coordinación*

Nivel: Sin Coordinación Prácticas de modelación: observar, interpretar y organizar las variables y condiciones de la experimentación
Indicación: 1. En la siguiente actividad, en equipo observen el llenado del recipiente que se asignó y comunica sin palabras (escritas o pronunciadas) y sin mímica, cómo se llenó el recipiente. E1E1: *estamos dibujando que el traste empezó lleno y asi va a ser en todos los dibujos para que se pueda apreciar que, aunque tenga la misma cantidad de líquido (refiriéndose al dispensador de agua), el de abajo va a ir subiendo (refiriéndose al recipiente cilíndrico que se está llenando), y eso va a hacer que sea un* ***flujo constante****, que salga la misma cantidad de agua para el* ***tiempo*** *que vaya pasando.*

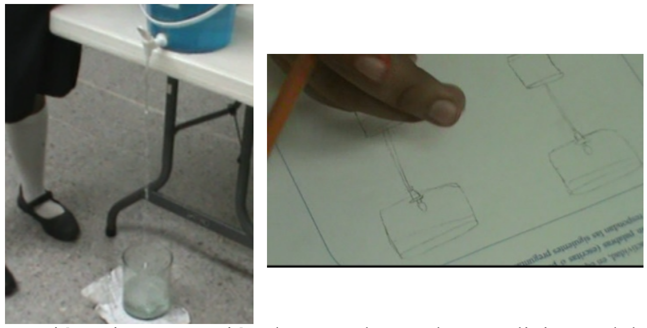


Figura 3. Experimentación e interpretación de acuerdo con las condiciones del experimento.

Discusión

Aunque la evidencia en resultados es poca, en ella se puede ver como la E1E1 hace una interpretación de la experimentación en donde comienza a organizar variables y las condiciones del experimento, haciendo énfasis en el flujo constante del agua asegurando que esto hace que salga la misma cantidad de agua en el tiempo trascurrido.

Esto nos da una primera mirada de que con actividades matemáticas basadas en la categoría de modelación escolar y el estudio de las variaciones a través de prácticas de modelación se logra desarrollar el razonamiento covariacional.

En el apartado de resultados solo se muestra evidencia de uno de los niveles, sin en cambio, se espera mostrar evidencia del resto de los niveles de razonamiento covariacional así como también las prácticas de modelación que los orientan. Esto es solo una pequeña parte de lo que pretende realizar con esta investigación es curso y se quiere dar evidencias consistentes para dar prueba a nuestra hipótesis.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2000). *Teaching and Learning Calculus. What Can be Learned from Education Research and Curricular Changes in France*. Incluido en Research in Collegiate Mathematics Education. IV, by Dubinsky et al. Recuperado de www.Research in Collegiate MathematicsEducation. IV

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33(5),* 352–378.

Ferrari, M., Martínez-Sierra, G. & Méndez, M. (2016). Multiply by adding: Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *Journal of Mathematical Behavior,42,* 92–108. https://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.003

García, J. (2013) La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación,37* (1), 29-42. ISSN: 2215-2644

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: La modelación para la matemática escolar*. Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Méndez, M. y Cordero, F. (2012). La función de la modelación en la resignificación del conocimiento matemático. En O. Covián, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primer Coloquio de Doctorado*, (pp. 257 –267). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav.

Molina, M. Castro, E. Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las matemáticas, 29* (1), 075-088.
Moreno, C. y Ríos, P. (2006) Concepciones en la enseñanza del cálculo. *Sapiens Revista Universitaria de Investigación. 7*(2), 25-39. ISSN: 1317-5815
Salinas, P. y Alanís, J. (2009) Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática. 12* (3), 355-382.
Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Covariación Logarítmica

Martha Yadhira Roldán López

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas
Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

El presente trabajo muestra el análisis realizado en el Sistema Educativo Nacional, tomando como marco de referencia las reformas de la Nueva Escuela Mexicana, la cual aún no entra en rigor en nivel medio superior. Además de la revisión de artículos que se han trabajado respecto al contenido matemático elegido.
La investigación se hizo en torno a lo que marca el Programa de Estudios del Bachillerato General en Matemáticas IV, referente al contenido matemático de función exponencial y logarítmica. El actual trabajo tiene como objetivo fortalecer la noción de logaritmo en estudiantes de nivel superior a partir de la covariación entre dos progresiones; una aritmética y otra geométrica.

Palabras clave: Covariación logarítmica, progresión aritmética, progresión geométrica.

Ferrari & Farfán (2010), establecen que lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición, cercana a la definición primitiva de logaritmo; mismas que incentivan a analizar a la covariación. En Ferrari & Farfán (2010), a partir de grupos de discusión con profesores, se observa que coinciden con su poco acercamiento a los logaritmos; apreciándose la frecuente ausencia de espacios para discutirlos con los estudiantes, debido a la densidad de conceptos que deben impartir en cursos de álgebra.

Según Siebert (2017), incluso después de completar una unidad sobre logaritmos, muchos estudiantes continúan luchando para razonar sobre los logaritmos de manera poderosa, lo que sugiere que no han desarrollado un significado útil para los logaritmos. Aunque Quintanilla (2018), menciona que los estudiantes antes de tener acceso a computadoras y calculadoras, desarrollaron su intuición de los logaritmos mediante el uso de tablas de valores.

Weber (2019), analizó la historia de los logaritmos para mostrar por qué pueden entenderse como división repetida, así como la división puede entenderse como resta repetida. Señala que, los maestros pueden hacer que los logaritmos sean significativos para los estudiantes comenzando con esta conceptualización, ya que no se refiere a exponentes, sino al más accesible concepto de división.

Euler fue uno de los primeros matemáticos que utilizó esta propiedad exponencial como definición (1765). Define el logaritmo como el inverso de la exponenciación. Los logaritmos se inventaron a principios del siglo XVII, más de 100 años antes de que Euler los definiera como el inverso de los exponentes. Napier y Bürgi, dos matemáticos que trabajan independientemente uno del otro, primero desarrollaron el concepto de logaritmos para simplificar los cálculos astronómicos que involucran números muy grandes.

Aunque actuaban independientemente el uno del otro, Napier y Bürgi utilizaron técnicas bastante similares: cada uno yuxtapuso dos secuencias, una geométrica y otra aritmética. Los números en la progresión aritmética se usaron para representar (mucho más grandes y más difíciles de trabajar) los números en la progresión geométrica (Weber, 2019).

En Ferrari & Farfán (2010), trabajan en dos mundos distintos, el de multiplicar y el de sumar interrelacionados, lo cual permitió que anclara en los alumnos el argumento que "si reconocen una progresión geométrica y una aritmética entonces están hablando de una curva logarítmica"; esencia de lo logarítmico, no lo discreto que evidencia la sentencia mencionada, sino su naturaleza, el isomorfismo de mundos donde ambas operaciones funcionan, pero que al reconocerlas covariacionalmente nos lleva a definir los logaritmos.

Experimento de enseñanza: metodología de la investigación

De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).

Los experimentos de enseñanza se hacen para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos. El objetivo último es elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente (Molina, Castro, J. Molina & E. Castro, 2011).

Por lo tanto, considero que los experimentos de enseñanza crean el ambiente adecuado para el objetivo planteado, en donde podremos analizar la efectividad del diseño y de acuerdo a ello, posteriormente, para futuras investigaciones realizar un rediseño; además, se pretende evidenciar la evolución de los argumentos de los estudiantes; así como observar si lograron realizar una conexión entre ambas progresiones, una geométrica y la otra aritmética.

Objetivo de la investigación

El objetivo de nuestra investigación fue fortalecer en los estudiantes la noción de logaritmo a través de la covariación de dos progresiones, una geométrica y la otra aritmética. Se trabajará con un experimento de enseñanza que nos permitirá analizar lo que ocurre con alumnos de sexto semestre de la Licenciatura en Matemáticas, quienes ya han tomado los cursos de Cálculo. De esta manera se construyen o fortalecen argumentos y se ponen en funcionamiento distintas estrategias y herramientas matemáticas que les sean necesarias para lograr describir o caracterizar a la función logarítmica.

Participantes y contexto

Los estudiantes que participaron en la experimentación son alumnos de la Licenciatura en Matemáticas con especialidad en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Colaboraron en nuestro experimento tres mujeres, cuyas edades oscilan entre los 20-21 años.

En el plan de estudios de esta licenciatura se llevan varios cursos que atienden el estudio de la variación y el cambio, principalmente Cálculo I, II, III y IV, siendo estas materias en donde se enmarca el contenido matemático que se pone en juego en el diseño de esta investigación.

En el estudio de las funciones en cursos de Cálculo del nivel medio superior, encontramos a la función logaritmo dentro del temario, puesto que pertenece a las funciones trascendentes, pero comúnmente es tratada de manera algorítmica, partiendo de la función exponencial y relacionándola como su inversa. El suponer que los estudiantes obtuvieron estos conocimientos previos, y que se complementan con el amplio currículo del plan de estudio de la Licenciatura en Matemáticas, nos motiva a decir que están preparados para el diseño que se propone más adelante.

TABLA: Gestión de clase

<table>
<tr><th colspan="5">Gestión de clase</th></tr>
<tr><td>Actividad</td><td colspan="4">Covariación Logarítmica</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tiempo</td><td rowspan="2">100 minutos</td><td colspan="2">Momento I</td><td>60 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento II</td><td>40 minutos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">¿Con quienes se trabajará?</td><td rowspan="3" colspan="2">Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas</td><td>Número de alumnos</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Grado- Grupo</td><td>VI semestre</td></tr>
<tr><td>Turno</td><td>Matutino</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Forma de trabajar</td><td>Momento I
Uso aritmético de los logaritmos</td><td colspan="3">La actividad se enviará vía classroom y a partir de ella, trabajaremos mediante una sesión síncrona. Debido a las circunstancias, la actividad se llevará a cabo de manera virtual, y por lo tanto, se trabajará individualmente, a pesar de ello, irán compartiendo sus respuestas.</td></tr>
<tr><td>Momento II
Función logaritmo</td><td colspan="3">Se generalizan los argumentos obtenidos por los participantes a partir de una gráfica de la función logaritmo y se discutirán acerca de las leyes de la función logaritmo para calcular cualquier dato de nuestra función, obteniendo así la continuidad de esta.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Materiales y recursos didácticos que se requiere</td></tr>
<tr><td>Personas de apoyo</td><td colspan="4">Se contará con la presencia de la profesora responsable del grupo, por cualquier motivo que pudiese presentarse.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Recopilación de la información</td></tr>
<tr><td colspan="5">✓ Al finalizar la sesión virtual, se solicita entregar un informe con la actividad realizada.
✓ Video de la sesión
✓ Fotos de las producciones</td></tr>
</table>

Recolección de datos

La dinámica de trabajo se desarrolló de manera virtual debido a la situación que se enfrenta a nivel mundial en cuanto a la contingencia sanitaria SARS-COV-2, conocido como COVID-19, por lo tanto, cada alumna se encontraba trabajando desde su hogar. La actividad se llevó a cabo de manera síncrona. Se contó con la presencia de un investigadores profesor (P1) y un investigadores observador (P2). En la Tabla 1 se muestra la distribución por sesión del tipo de tareas, así como los métodos de recogida de datos empleados, el número de alumnos asistentes y la temporalidad y duración de la sesión. Se trabajó con las estudiantes durante 1 sesión de 120 minutos el domingo 14 de junio del 2020.

TABLA 1 Características generales de la experimentación

FECHA (duración)	NA	ACTIVIDADES	RECOGIDA DE DATOS
14 junio (1:30 h)	3	Actividad escrita individual Discusión	☐ Grabación en video y audio. ☐ Informe de los estudiantes. ☐ Notas de la investigadora-docente.

La sesión se realizó de manera individual y la videograbación se llevó a cabo por medio de la opción de grabar la reunión por Meet, donde se registran los diálogos del profesor con cada uno de los estudiantes y en ocasiones la interacción entre ellos. La profesora que está a cargo del grupo estuvo únicamente fungiendo el rol de observador. A continuación, en la Tabla 2, se muestran las claves que se utilizarán en los resultados de la investigación.

TABLA 2
"Claves para la transcripción"

Investigador-Profesor – P1
Estudiante 1 – E1
Estudiante 2 – E2
Estudiante 3 – E3
Investigador-Observador – P2

Resultados

En esta sección, está organizado el análisis de las producciones de los estudiantes en la sesión desarrollada. Seleccionamos para ello episodios donde se evidencie el razonamiento covariacional que emerge al transcurrir las actividades planteadas.

Se invitó a los estudiantes a trabajar de manera independiente en las hojas de trabajo donde partiendo de unas fichas que se muestran se tiene la consigna de completar los espacios en blanco a partir del análisis de sus variaciones en dos progresiones. Se escogieron episodios que evidencian distintos momentos y conflictos en los estudiantes durante la sesión síncrona.

Episodio 1: Descubriendo las variaciones

Mientras resolvían individualmente la primera pregunta de la Actividad, E1 menciona: "lo que hice fue ver qué relación había entre el 27 y el 3, porque supongo yo que esas fichas pertenecen a lo que vienen siendo una función y vi qué relación podía tener con eso; y me doy cuenta que si multiplico el 3 tres veces, tengo lo que viene siendo el 27", mientras que E2 lo resolvió de la siguiente manera: "trate de ver primero en las fichas que están seguidas, la del 243 y el 729, entonces lo que hice fue dividir el 729/243 y vi que me salió el 3; así que de ahí empecé a multiplicar 27 por 3 y lo que me salió lo multipliqué por 3 y me salió el 243 y así sucesivamente", además, añadió: "para abajo no la pensé mucho, iba de 1, era el 4, 5, 6, 7; entonces ahí si no sé si esté correcta o no. Pensé más en la parte de arriba".

Observamos que, en las descripciones que realiza E1, se enfocó en hallar la relación entre ambas progresiones dentro de una misma ficha, a diferencia de E2, quien trabajó con ambas progresiones pero de forma independiente.

En la pregunta 2 se solicita encontrar la regla de multiplicar haciendo uso de las fichas; en donde E1 menciona: "al menos lo que yo estoy viendo, en la parte superior vamos a tener una progresión geométrica, la cual va yendo de 3 en 3; bueno, multiplicando por 3; y abajo tendremos una progresión aritmética, que sería de 1 en 1. Y es así como vamos a obtener las fichas, en la parte superior vamos a ir multiplicando, por ejemplo, podemos multiplicar 27 por 243 y nos da el 6551 y abajo podemos sumar el 3+5 y nos da 8". La respuesta de E1 evidencia familiaridad con tareas que requieren determinar el comportamiento de dos progresiones, una aritmética y otra geométrica. De E2 en su informe se rescata lo siguiente (figura 1):

Sí es posible multiplicar dos fichas y obtener otra, en mi caso tomé dos de las fichas que tenemos y operé con ella, las cuales fueron:

	Ficha 1	Operación	Ficha 2	Ficha obtenida: 5
y	27	×	81	2187
x	3	+	4	7

Figura 1: Proceso de multiplicación de E2.
Nota: Recuperado del informe entregado vía Classroom

Para la siguiente pregunta, la cual está enfocada ahora en si es posible realizar la división, E1 de manera inmediata responde: "Sí, ¿no? Es su operación inversa."; a lo que E2 menciona el procedimiento que realizó: "En la parte de arriba dividí y me salió el resultado de una ficha; y en la parte de abajo, reste". Lo cual completa en su informe de la siguiente manera (figura 2).

Sí es posible debido a que ahora estamos aplicando las operaciones inversas de las que teníamos anteriormente, para comprobarlo tomé dos fichas y las operé:

	Ficha 5	Operación	Ficha 2	Ficha obtenida: 1
y	2187	÷	81	27
x	7	−	4	3

Figura 2: Proceso de división de E2.
Nota: Recuperado del informe entregado vía Classroom

Posteriormente, la actividad solicitaba analizar cuáles fichas pertenecen o no al juego. En el siguiente extracto, se muestra la conversación respecto a la ficha que E1 menciona que quería aceptar o descartar como parte del juego:

Extracto 1: Estableciendo intervalos
E1: Empecé a tener dudas en el 8, pero al menos lo que yo hice, el 8 es una imagen, entonces, va a tener su dominio. Su dominio va a ser algo así como 1 punto y algo...
E1: Sí pertenece, va a ser 1.89. La función exponencial... su imagen está dentro de todos los reales positivos y estamos hablando en el eje de las "y", pertenece a todos los reales positivos, entonces el 8 es la imagen, es la ficha que se encuentra en la parte superior el 8 y la parte inferior va a ser un número que se aproxime al 2 sin tocarlo y que sea mayor de 1, así que se va a encontrar en ese rango que decía el dominio.

Algo importante que surgió en E1 es que al enfocarse en la función exponencial (considerando a la progresión aritmética como la variable independiente y a la progresión geométrica como la dependiente), estableció el intervalo entre los cuales debería estar el exponente de la función cuya imagen corresponda al número solicitado, en este caso el 8.

Posteriormente, E3 menciona que al igual que sus compañeras, descarta dos fichas, la que tiene un cero y la que tiene una cantidad negativa, (ambas en la progresión geométrica); pero al cuestionarle sobre lo qué ocurriría con un cero en la parte superior (progresión geométrica), se da el siguiente dialogo:

Extracto: Descartando el 0 en la progresión geométrica
E3: Sí, sería como tener el 3 a la 0.
E2: No, dijiste que el 0 estaría en la parte superior, ¿no?; y para elevar tiene que estar el 0 abajo.
E3: Si elevas 3 a la -1 daría -3
E1 y E2: 3 a la -1 daría 0.33.

Por un lado, E3 muestra confusión acerca del comportamiento que tienen las fichas en la parte superior, la cual tiene la característica de ser una progresión geométrica; en cambio, E1 y E2, han logrado establecer la relación que existe entre ambas progresiones. Por ello, cuando se pregunta acerca de lo que se tendría que colocar en la parte superior, si abajo aparece n, E1 de manera inmediata responde: "A la n, si seguimos con las fichas, sería el 3^n". Ahora cuando se tiene el "n" en la parte superior, y se busca la expresión de la parte inferior, mencionan E1 y E2 que es más complicado.

Después de pensar un rato, E1 sugiere: "Logaritmo... ¿sería la inversa, no?... ¿sí no?, utilizando la base 3 de logaritmo". Para esto, P1 únicamente mencionó acerca de cuáles serían los elementos que se podrían retomar. Cuando P1 pregunta ¿de qué dependería que se trabaje con lo exponencial o lo logarítmico?, E1 menciona: "por ejemplo, si en la parte superior estamos hablando de las *y*... estamos hablando de una función exponencial"; a lo que P1 cuestiona: ¿cuál sería la característica de tus "y"?, y E1 responde: "son de la forma 3^x; y la otra sería una logarítmica base 3, ahí estaríamos hablando de 2 funciones distintas, una exponencial y una logarítmica".

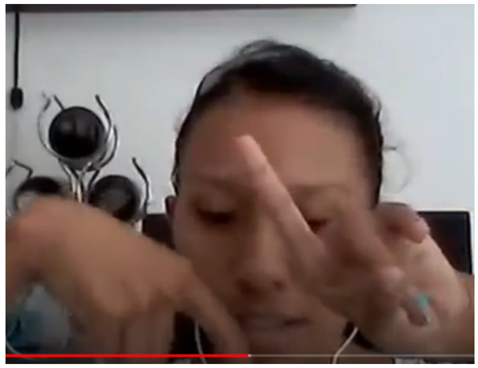


Figura 3: E1 comunicando la forma de las dos gráficas: función exponencial y logarítmica.
Nota: Recuperado de la videograbación por Meet

Por último, considerando sus informes, E2 comprueba que es necesario aplicar el logaritmo cuando se conoce únicamente el valor de la parte superior (progresión geométrica).

$$log_3(3^x) = log_3(81)$$

$$x = log_3(3^x)$$

$$x = log_3(81)$$

$$x = 4$$

Figura 4: Aplicación de logaritmo por parte de E2.
Nota: Recuperado del informe entregado vía Classroom

En la segunda actividad, se solicitó observar una gráfica, pero E1 de manera inmediata mencionó: "Una función logarítmica base 3". Acerca de sus características, mencionó: "tiene una progresión aritmética en las *y* y una progresión geométrica en las *x*"; y E2, menciona que: "es creciente, y podemos agregar que es la inversa de la exponencial".

Cuando se le cuestiona a E1 acerca de cómo determinó la función que se mostraba en la gráfica, ella menciona lo siguiente:

> "Primero tomé el valor de 1 en el "y"; por ejemplo, en y=1, el punto que pertenece a esa función sería el (3,1) y así me fui con ese, después me fui con el 2 en las "y" y ya, eran los que anteriormente habíamos analizado en la forma exponencial y al verlo así dije "ah, es la logarítmica". El (3,1) forma parte de una exponencial, entonces, el inverso de eso, bueno, el punto inverso a ese sería el (3,1), que sería para una función logaritmo. Es lo que vi en la última pregunta que nos hicieron de cómo veíamos la diferencia entre una y otra, lo que yo entendí es haciendo estas cosas".

Es decir, a partir de los datos de la gráfica, fijó su atención en el punto cuya coordenada tuviera en su entrada en "y" el número 1, dado que una de las características de una función logarítmica es que la imagen de la base es igual a 1.

Para localizar nuevos puntos de la gráfica, de inmediato lo relacionaron con las operaciones realizadas en la actividad anterior, por lo que E2 menciona: "en las *x* ahora vas a multiplicar" y E1 complementa diciendo: "Ajá, y en las *y* vamos a sumar".

En la figura 5 se muestra el procedimiento de E2 desarrollado para su informe.

Sí, ya que si hacemos uso del punto que se nos muestra en la imagen $(1.73, 0.5)$, a partir de este podemos generar nuevos puntos haciendo uso de las operaciones que encontramos en la actividad anterior:

	Punto	Operación		Punto obtenido
x	1.73	×	3	5.19
y	0.5	+	1	1.5

	Punto	Operación		Punto obtenido
x	5.19	×	3	15.57
y	1.5	+	1	2.5

Figura 5: Proceso de multiplicación de E2.
Nota: Recuperado del informe entregado vía Classroom

Por último, cuando se les cuestiona de qué manera obtener a cuánto equivale "y" en cualquier punto de la función, pero después se solicita conocer a cuánto equivale la imagen de 6, a lo que E1 menciona: "logaritmo base 3, y eso lo podemos ver como logaritmo de $3x2$, que igual lo podemos ver como logaritmo de 3 + logaritmo de 2, entonces sería $1 + 2$ ... Tenemos 6 . Lo que yo estoy haciendo, es esto (figura 6):

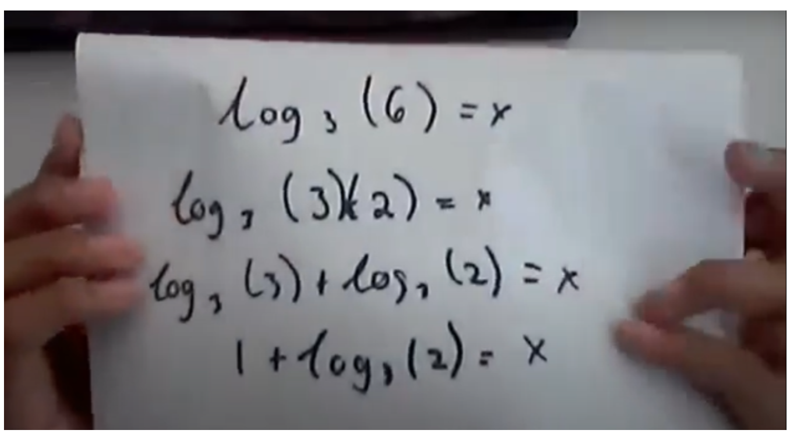


Figura 6: Uso de propiedades del logaritmo de E1.
Nota: Recuperado de la videograbación por Meet

Podemos observar que E1 aplica propiedades de los logaritmos para localizar el valor que corresponde a la imagen de la gráfica cuando el valor en las abscisas corresponde a 6. E1 lo representó como x, puesto que es el valor que se desconoce. Siendo así, que a partir de reconocer la función logarítmica, es posible determinar las ordenadas que pertenecen a la función considerando cualquier valor en las abscisas.

Conclusiones

Durante la actividad, al trabajar con las fichas se propició trabajar con conocimientos simples, que van desde reconocer dos progresiones, una geométrica y una aritmética; lo cual implícitamente involucra el multiplicar y sumar. Al lograr interrelacionar ambas progresiones, se trabaja con una covariación, en este sentido se trabajó con la covariación logarítmica. Hasta un determinado momento se trabaja con lo discreto, pero llega un punto en que es necesario el uso de los logaritmos para lograr la continuidad. En un primer momento se trabajó con los usos aritméticos del logaritmo, para posteriormente concluir con la función logarítmica.

Referencias bibliográficas

Barab, S. & Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), pp. 1-14.

DGB. (2018). *Matemáticas IV*. México: SEMS.

Ferrari & Farfán. Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME* [en línea]. 2010, 13 (4-I), 53-68 [fecha de consulta 11 de mayo de 2020]. ISSN: 1665-2436. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33529137004

Kelly, A. & Lesh, R. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1). 75-88.

Quintanilla, J. (2018). Developing Intuition for Logarithms. *The National Council of Teachers of Mathematics*, 80.

SEP. (2017). *Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior.* México: SEMS.

Siebert, D. K. (2017). Significados poderosos para logaritmos. *The National Council of Teachers of Matemathics*, 662-666.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. *Research design in mathematics and science education*, 267-307.

Weber, C. (2019). MAKING SENSE of Logarithms as Counting Divisions. *The National Council of Teachers of Mathematics*, 374-380.

Revisión de literatura

El razonamiento cuantitativo, el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional en la modelación matemática

Gustavo Martínez Sierra

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas

La literatura reciente (Moore, 2012, 2013; Saldanha & Thompson, 1998; Stevens, Paoletti, Moore, Liang, & Hardison, 2017; Thompson & Carlson, 2017) señala una estrecha relación entre tres tipos de razonamiento: el razonamiento cuantitativo, el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional. En mi ponencia presentare el significado de tales tipos de razonamiento y las relaciones existentes entre ellos. También presentare la relación que existe entre estos tipos de razonamiento con la modelación matemática.

Referencias bibliográficas

Moore, K. C. (2012). Coherence, quantitative reasoning, and the trigonometry of students. In R. Mayes & L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context* (pp. 75–92). Laramie, WY: University of Wyoming Press.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 225–245. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9450-6

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berensah & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education – North America*. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Stevens, I. E., Paoletti, T., Moore, K. C., Liang, B., & Hardison, H. (2017). Principles for designing tasks that promote covariational reasoning. *The Twentieth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, (2011).

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of mathematical thinking. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Revisión de la literatura sobre la enseñanza y aprendizaje de la Programación Lineal: una mirada desde la modelación matemática

Adrián Muñoz Orozco
Gustavo Martínez Sierra
Marcela Ferrari Escolá

El objetivo de este estudio es presentar una revisión de la literatura sobre la enseñanza y aprendizaje de la Programación Lineal en el ámbito de la Matemática Educativa y su relación con la modelación matemática. Para la revisión de literatura, se consultaron diferentes bases de datos y revistas de investigación en matemática educativa de habla inglesa y española. Entre los resultados de esta revisión se evidencia que desde la Matemática Educativa hay un interés por investigar sobre PL sin embargo es un tema que poco se ha explorado y la mayoría de investigaciones sobre este tópico se centra en áreas como la educación para ciencias económicas y educación en ingeniería.

Palabras Clave: Revisión Literatura; Programación Lineal; Modelación Matemática.

La programación lineal (PL) es una temática que se dicta en los cursos de Investigación de Operaciones (IO) o Investigación Operativa para Ciencias Administrativas y algunas Ingenierías como la Industrial e Informática (Astutik y Fitriatien, 2018; Yoder y Kurz, 2015; Riddle, 2010), y en algunos países también se enseña a nivel preparatoria, por su relación con las inecuaciones y la función (Beatrice, Amadalo, y Musasia 2015). Entre las características de PL es su utilidad en la toma de decisiones, en áreas como finanzas, marketing, producción, asignación de tareas, mezclas y logística (Taha, 2012; Hiller y Lieberman, 2010).

Matemáticamente, un problema de PL se puede solucionar empleando al menos tres métodos: el gráfico, simplex y solver por Excel. E involucra según Taha (2012) tres aspectos: variables a definir, una función objetivo que se desea optimizar (minimizar o maximizar) y un sistema de restricciones que se representan mediante un sistema de inecuaciones de dos o más variables. Cuando, se emplea el método gráfico se utilizan gráficas lineales, para representar y determinar el campo de soluciones; en el método simplex se utiliza una matriz de coeficientes de la función objetivo y de las restricciones, la cual se soluciona hasta determinar las respuestas al problema; y en el solver con Excel se usa la herramienta tecnológica una vez se han interpretado las tres características fundamentales dentro un problema de PL.

Un aspecto común en los tres métodos, es que un problema de PL debe ser interpretado del lenguaje verbal al algebraico, es decir, se emplea la Modelación Matemática como primer recurso para solucionar el problema; y es ahí donde según Murphy y Panchanadam (1999), Riddle (2010) y Stevens y Palocsay (2004) los estudiantes de pregrado presentan sus primeras dificultades, puesto que en algunas ocasiones los estudiantes no logran plantear de manera correcta en lenguaje algebraico las restricciones del problema o identificar la función objetivo.

También, Sole (2016) y Yoder y Kurz (2015) mencionan que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de problemas de PL puesto que se enseña con alto enfoque matemático, dejando de lado las aplicaciones de la PL que es según estos investigadores es donde se debe fundamentar la enseñanza y aprendizaje de este tópico para generar comprensión e interés por parte de los estudiantes, potenciándose desde la modelación matemática. Postura con la que, Neidigh y Langella (2020) concuerdan, dado que enfatizan en la importancia de que estudiantes Ingeniería y Ciencias de Administración se relacionen con la PL y que la usen como una herramienta para solucionar problemas reales y no desde un enfoque matemático. .

Además, como docente del curso de Investigación de Operaciones he notado que en los problemas de PL los estudiantes se les dificultad la interpretación del problema a solucionar. Y cuando abordan el método gráfico se les problematiza encontrar la zona de solución factible, dado que tienen dificultades para encontrar la intersección de las inecuaciones especialmente cuando en la clase se abordan problemas teóricos. En el método simplex se les dificulta resolver la matriz asociada al problema y cuando se usa solver solamente se evidencia la interpretación del problema y la redacción de las respuestas.

En relación a las características de los tres métodos, Kydd (2012) y Fernandes y Pereida (2018) enfatizan en la importancia y necesidad de explorar el método gráfico antes que otros métodos dado que lo considera como la base para comprender la esencia de la PL, dado que en este método se sientan las bases de la PL, que permite generalizar el funcionamiento de dos variables a n variables, en problemas prácticos.

En este sentido, las preguntas que dirigen esta revisión de literatura son las siguientes:

¿Cuáles son las investigaciones que se reportan sobre la enseñanza aprendizaje de la PL?

¿Qué vinculo evidencia la literatura en la PL y la Modelación Matemática?

¿Cómo se podría potenciar el aprendizaje de la PL desde la Modelación Matemática?

Elementos teóricos

La modelación matemática en matemática educativa según Erbaşa et al. (2014) puede comprenderse desde dos perspectivas distintas. En la primera los estudiantes reciben modelos predeterminados y se espera que apliquen estos modelos a situaciones de la vida real, el objetivo final es mejorar las competencias de modelado de los estudiantes. En la segunda perspectiva la suposición subyacente es que los estudiantes pueden aprender matemática de manera significativa a través de un proceso de modelado en el que necesitan y descubren intuitivamente conceptos matemáticos mientras abordan una situación problema de la vida real.

En ambas perspectivas la modelación matemática se convierte en una herramienta útil dentro de la enseñanza de las matemáticas. Por esta razón, investigadores del área de la Matemática Educativa se han interesado por proponer marcos de referencia para abordar investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde la modelación, entre ellos es de interés el modelo teórico propuesto por Haines, Crouch, Davis (2000) donde presenta a la modelación matemática como proceso cíclico que costa de los elementos descritos en la figura 1. Así, una característica de este modelo es enfatizan en la necesidad de reportar los resultados para retroalimentar el modelo (Kaiser, 2020).

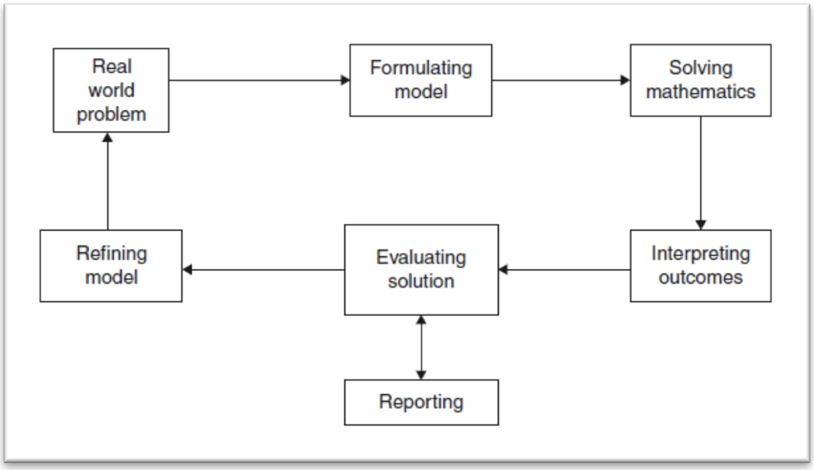


Figura 1. Ciclo de modelación matemática (Haines et al., 2000)

Metodología

Para llevar a cabo la revisión de literatura se consultaron diferentes bases de datos como por ejemplo: ISI WEB OF SCIENCE, SCOPUS, SCIMAGO JOURNAL & CONTRY RANK; SCIENTIFIC ELECTRONIC LIBRARY ONLINE SCIELO ANALYTICS que son buscadores reconocidos dentro del área de Matemática Educativa. Además, se consultaron revistas de Educación Matemática *For the Learning of Mathematics, Journal of Mathematical Behavior*, *Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics; Journal of Mathematical Sciences and Mathematics Education; y journal of mathematics teacher education.* También, se utilizaron buscadores académicos como google académico y Eric.

Resultados

Como resultado de la revisión de la literatura se encuentran las siguientes publicaciones:

Beatrice, Amadalo, y Musasia (2015) presentan una propuesta de enseñanza la PL empleando el método gráfico. Como característica de este trabajo es que usan un grupo de control para evidenciar la utilidad de la propuesta de enseñanza. Entre los resultados de esta investigación se evidencia que el grupo de control mejora respecto a otro y se plantea la necesidad de que la PL se trabaje no solo a nivel universitario que es lo usual por su presencia de esta temática en el currículo, si no en estudiantes de nivel preparatoria, por su relación con las inecuaciones y su diversidad de aplicaciones de la PL. Una peculiaridad de la PL es que Kenia a nivel preparatoria solo se enseña las aplicaciones de PL a estudiantes más avanzados.

A nivel universitario se encuentran más trabajos sobre la PL entre ellos el de Sole (2016) quien reporta que la enseñanza de la PL a través de problemas prácticos potencia el aprendizaje de sus estudiantes. Además, la autora menciona que si los problemas se plantean a través de preguntas abiertas y que puedan ser solucionadas de forma intuitiva potencia aún más el aprendizaje, puesto que el estudiante no se ve obligado a recurrir de inicio a constructos matemáticos que se le dificultan y en ocasiones lo alejan de las aplicaciones de la PL.

Kydd (2012) realiza una investigación con estudiantes de Ciencias de la Administración sobre la enseñanza de la PL método gráfico, empleando herramientas como Power Point para que los estudiantes pueden reconocer elementos, como zona factible y como está cambia según varían las restricciones. Como resultado, de esta investigación se evidencia que los estudiantes que trabajaron con tecnología evidencian mejores procesos de aprendizaje.

Otros investigadores como Yoder y Kurz (2015) analizan el currículo enfatizando en que la PL es un tema pertinente dentro de la enseñanza de las matemáticas, dado que contribuye a la toma de decisiones en áreas como la economía, y está presente en varios planes y programas de Ingenieras y Ciencias Administrativas. Adicionalmente, reportan que PL también es útil para que los estudiantes mejoren en la modelación matemática.

Astutik y Fitriatien (2018) realiza una investigación sobre enseñanza de la PL método simplex en nivel universitario, empleando herramientas digitales, particularmente usando MATLAB, que es una herramienta que permite la solución de matrices de forma interactiva. Entre los resultados de esta investigación se destaca que el uso del programa permite una mejora en la comprensión y en la resolución de problemas de la PL.

Murphy y Panchanadam (1999) estudian formas alternativas de enseñar la formulación del modelo de programación lineal, empleando como referente teórico la psicología cognitiva sobre la formulación de problemas verbales de álgebra. Como resultado de esta investigación los investigadores concluyen que los estudiantes tienen dificultades para formular modelos PL porque no pueden pasar de un problema verbal a un modelo algebraico.

La investigadora Riddle (2010) y presenta un plan de lección introductoria para PL, bajo un enfoque de aprendizaje activo, donde los estudiantes discuten entre ellos lo que están haciendo, permitiéndoles formar estrategias para plantar elementos como la función objetivo y las inecuaciones del sistema. Como conclusión de esta investigación la autora menciona que esta actividad mejora la interpretación de los problemas de PL en modelos algebraicos, sin embargo los datos limitan el análisis de la solución de los problemas.

En la misma línea de Murphy y Panchanadam (1999) y Riddle (2010) que centran su atención en la interpretación del problema PL en modelo algebraico, Stevens y Palocsay (2004) propone desarrollar una representación del problema en términos de cantidades medibles que luego pueden traducirse, mediante la aplicación de una regla explícita, al algebraico. Como resultado de este estudio los investigadores mencionan que con el uso de esta metodología los estudiantes pueden mejorar sus habilidades en el modelado de los problemas.

Neidigh y Langella (2020) proponen un problema de distribución, el cual es presentado desde una perspectiva realista, dejando ver a los estudiantes las diferentes características que tiene un problema de PL y como este puede ser modelado mediante la PL. Los investigadores señalan que este tipo de actividades mejoran la comprensión de la PL, dado que les permite conocer la aplicabilidad del tema y no se ve este objeto matemático como algo aislado y sin uso.

Hosein, Aczel, y Clow (2006) realizan un estudio sobre la enseñanza y aprendizaje de la PL en EEUU y en Reino Unido, y como los profesores incluían o no la tecnología en sus prácticas de enseñanza. Como resultado de este estudio concluyeron que los docentes de Reino Unido utilizaban más fácil un software como solver que un software matemático, mientras los profesores de EEUU era más teóricos, utilizando otros recursos como lápiz y papel, todo esto para generar comprensión en los estudiantes.

Por otro lado, Bixby (2012) presenta una breve historia de la PL donde da a conocer algunos aspectos que incidieron en el desarrollo de la PL método simplex. En esta investigación se reportan los alcances de la PL los sucesos que dieron a esta temática y los problemas que resolvían. Además, presenta su relación con tecnología y como esta se convierte en una herramienta útil para solucionar problemas de esta índole.

Las anteriores publicaciones tienen como características que fueron presentadas en revistas de habla inglesa. A continuación, se presentarán otros resultados de la revisión de la literatura pero en español.

Ramón (2018) presenta una propuesta de enseñanza de la PL método gráfico y simplex a estudiantes de secundaria empleando la página PHP Simplex y usando como referente teórico la teoría de aprendizaje situado. Como resultado de esta investigación la autora menciona que los estudiantes manifiestan que les gusta esta dinámica de aprendizaje puesto que les permite comprender aspectos como sistemas de ecuaciones, sistemas de inecuaciones y las aplicaciones de la PL.

López y Sánchez (1999) dan una conocer una investigación donde reflexionan sobre el uso de la tecnología en la enseñanza de la PL en cursos de administración de empresas. Como conclusión de esta investigación los autores mencionan que los recursos informáticos da respuesta a las necesidades del administrador, sin embargo no se genera comprensión de lo que se está realizando y de los constructos matemáticos detrás de PL. En síntesis el uso de ordenador es práctico, pero no se genera comprensión.

También entre los resultados de esta revisión de literatura en español se encontraron algunas tesis de maestría de universidades en países como Colombia, Ecuador y Perú de estudiantes de programas de didáctica de las matemáticas y educación matemática. Lo anterior, evidencian que desde la matemática educativa hay un creciente interés sobre investigar sobre la enseñanza y aprendizaje de la PL.

Reflexiones finales

A partir de la revisión de la literatura especializada, es decir, publicaciones en revistas de prestigio podemos concluir que la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la programación lineal es relativamente poca, y la gran mayoría de lo que se ha realizado no es propuesto directamente desde la Matemática Educativa si no desde otras áreas de estudio como la educación en enseñanza de las ciencias de administración y enseñanza de la ingeniería. Sin embargo, al revisar literatura en español y publicaciones en revistas latinoamericanas se evidencia más investigaciones desde el área de Matemática Educativa pues se puede apreciar que desde el área de educación matemática se están realizando investigaciones de esta índole, pero es bajo la modalidad de trabajo de grado, lo que estaría pendiente es que se realicen publicaciones en revistas indexadas.

Respecto a la relación entre modelación matemática y la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la PL se encuentra muy poco, a pesar que desde una mirada generar de la PL se evidencia su vínculo con la modelación. Sin embargo la investigación de Yoder y Kurz (2015) es un resultado importante de la revisión de la literatura puesto que nos brinda reflexiones importantes respecto a la viabilidad de investigar la PL desde la modelación matemática.

Por último, consideramos que la posibilidad de potenciar la enseñanza y aprendizaje de la PL es viable y puede dar resultados significativos, por los siguientes aspectos. El primero es las aplicabilidad de la PL dentro de distintos campos lo que desde la modelación matemática puede ser ampliamente explotado. El segundo, es que la PL se compone de diversos objetos matemáticos, que de manera individual han sido investigados usando la modelación matemática lo cual hace interesante su estudio articulado haciendo uso de la modelación matemática. El tercero, es que la modelación matemática a demostrado ser un recurso útil para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que lo convierte en una herramienta útil para abordar cualquier noción matemática en este caso la PL.

Referencias bibliográficas

Astutik, E. P., & Fitriatien, S. R. (2018). Integrating MATLAB in teaching linear programming at the university level. *International Journal on Teaching and Learning Mathematics*, *1*(2), 84. https://doi.org/10.18860/ijtlm.v1i2.5882

Beatrice, S., Amadalo, N., & Musasia, M. (2015). Problem based learning technique and its effect on acquisition of linear programming skills by secondary school students in Kenya. *Journal of Education and Practice*, *6*(20), 68–75.

Bixby, R. E. (2012). A Brief History of Linear and Mixed-Integer Programming Computation. *Documenta Mathematica · Extra*, *ISMP ISMP*, 107–121.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (1999). Teaching and learning linear algebra in first year of french science university. *European Research in Mathematics Education I*, *August*, 103–112. https://doi.org/10.1080/002202799183061

Erbaş, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakiroğlu, E., Alacaci, C., & Baş, S. (2014). Mathematical Modeling in Mathematics Education: Basic Concepts and Approaches. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *14*(4), 1621–1627. https://doi.org/10.12738/estp.2014.4.2039

Haines, C., Crouch, R., & Davis, J. (2000). Mathematical modelling skills: A research instrument. *University of Hertfordshire, Department of Mathematics Technical Report No*, *55*.

Hillier, F., & Lieberman, G. (2010). *Introducción a la Investigación de 0peraciones.* México: McGraw-Hill.

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. *Encyclopedia of mathematics education*, 553-561. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101

Kydd, C. T. (2012). The Effectiveness of Using a Web-Based Applet to Teach Concepts of Linear Programming: An Experiment in Active Learning. *INFORMS Transactions on Education*, *12*(2), 78–88. https://doi.org/10.1287/ited.1110.0076

López A., S., & Sánchez A., I. (1999). Didáctica de la programación lineal con ordenador para estudiantes de administración y dirección de empresas. *Revista de Enseñanza Universitaria, 14-15, 129-138.*

Murphy, F. H., & Panchanadam, V. (1999). Using analogical reasoning and schema formation to improve the success in formulating linear programming models. *Operations Research, 47(5)*, 663–674. https://doi.org/10.1287/opre.47.5.663

Neidigh, R. O., & Langella, I. M. (2020). Teaching students supply chain risk using a linear programming model of the fictitious online retailer Elbe. *Journal of Education for Business*, *95*(3), 148–158. https://doi.org/10.1080/08832323.2019.1622502

Ramón, J. (2018). Enseñanza y aprendizaje de la programación lineal mediada con phpsimplex en la educación secundaria. *Acta Latinoamérica de Matemática Educativa 31*, 914–922.

Riddle, E. J. (2010). An Active Learning Exercise for Introducing the Formulation of Linear Programming Models. *Decision Sciences Journal of Innovative Education*, *8*(2), 367–372. https://doi.org/10.1111/j.1540-4609.2010.00263.x

Stevens, S. P., & Palocsay, S. W. (2004). A translation approach to teaching linear program formulation. *INFORMS Transactions on Education, 4(3)*, 38-54. https://doi.org/10.1287/ited.4.3.38

Sole, M. A. (2016). Multiple Problem-Solving Strategies Provide Insight into Students' Understanding of Open-Ended Linear Programming Problems. *Primus*, *26*(10), 922–937. https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1199621

Taha, H. (2012). *Investigación de Operaciones.* México: Pearson.

Yoder, S. E., & Kurz, M. E. (2015). Linear Programming Across the Curriculum. *Journal of Education for Business*, *90*(1), 18–23. https://doi.org/10.1080/08832323.2014.968516

Experiencias de aula

Recursos didácticos

Crecimiento poblacional como Contexto problemático para la modelación: Reflexión docente sobre experiencia en aula

Aldo David Moreno Habana

Universidad de Quintana Roo e
Instituto Tecnológico de Chetumal

Fundamento Teórico

Aunque no es muy difícil darse cuenta de que las matemáticas son una de las áreas con mayores problemas en lo que respecto a su aprendizajes, desde niveles básicos hasta superiores; muchos investigadores han realizado investigaciones que lo evidencían.

Uno de los factores que han provocado que lleguemos a esta situación es el desempeño docente y el enfoque didáctico con base en el cual se eligen las estrategias y actividades para enseñanza y aprendizaje.

A grandes rasgos, la National Council of Teachers of Matemátics expone que los enfoques de enseñanza de las matemáticas se pueden separa en dos tipos: Tradicionales y Humanistas.

Los enfoques tradicionales se caracterizan por presentar a las matemáticas con problemas cerrados, estrategias de enseñanza centradas en algoritmos y conceptos formales de la matemática. Esto deja poco clara la relación entre los contenidos de las asignaturas de matemáticas y la vida diaria.

Por otro lado, los enfoques humanistas privilegian la relación entre el contenido de la asignatura y la vida diaria o profesionista del estudiante. Este tipo de trabajo potencía el desarrollo de aprendizajes significativos por parte de los estudiantes; o dicho en otras palabras, ayuda a evitar preguntar como ¿Esto para que me va a servir?.

Dentro de los enfoques humanistas, se encuentra el de modelación matemática, el cual se carácteriza por enfrentar a los estudiantes a problemas abiertos y poco estructurados. Este tipo de actividades requieren que el alumno tome decisiones, defina un plan de análisis, lo desarrolle y lo ponga a prueba. Cabe comentar que dichos problemas provocarán de forma implicita el uso de conceptos y herramientas matemáticas, lo que dará la oportunidad de analizar las propiedades de dichas herramientas y conceptos.

Para que ese tipo de enfoque y estrategias tenga buenos resultados, el papel del docente es fundamental. El profesor ya no es responable de la exposición de algoritmos o definición abstracta de conceptos, sino que debe promover la discusión entre las distintas estrategias que los estudiantes proponen, así como guiarlos en la abstracción y generalización de dichas estrategias.

Descripción de Experiencia en Aula

Con base en mi experiencia docente, considero que el enfoque de modelación matemática promduce mejores resultados que el tradicional, por lo que a lo largo de varios años he buscado adoptarlo de la mejor manera. La conversión de un enfoque a otro no es sencilla, hay muchos aspectos en los que se debe prestar atención.

Uno de los puntos en los que se debe de trabajar es el tipo de planteamientos a los que se les debe enfrentar a los estudiantes. No existen muchos libros en donde se expongan contextos para ser aplicados por estos enfoques, por lo que he ido desarrollando planteamientos de contextos problemáticos, entre ellos el crecimiento poblacional.

He encontrado que el fenómeno del crecimiento poblacional permite se diseñen planteamientos problemáticos con potencial didático que lleven al estudiante a usar conceptos como proporsiones, progresiones, funciones, ecuaciones, correlación, regresión, derivación, integración y ecuaciones diferenciales; lo cual permite que puedan ser utilizados en cursos de asignaturas como Cálculo Diferencial e Integral, Bioestadística y Matemáticas Generales.

He encontrado que el tipo de planteamiento problemático que se muestre a los estudiante respecto al fenómeno de crecimiento poblacional puede afectar al tipo de pensamiento quedesarrolle. Por lo que se debe prestar atención a dichos planteamientos, de forma que el docente prevea qué resultados quiere obtener.

Los resultados que propongo compartir es el tipo de respuestas que se provocan en los estudiantes según los planteamientos que se hagan. Cabe comentar que los planteamientos problemáticos he desarrollado lo he aplicado en grupos del primer año de licenciatura; especificamente en licenciaturas del área de ciencias de la salud.

He llegado a la conclusión que el rol del docente, dentro del enfoque de modelación matemática, no solo se reduce al acompañamiento que se le da al estudiante en su proceso de aprendizaje; sino que además su actividad empieza desde el momento en el que se proponen las actividades que conformarán la experiencia.

Referencias bibliográficas

Cirillo M, Pelesko J, Felton-Koestler M, Rubel L. Perspectives on modeling in school mathematics. En Hirsch C, McDufflie A, editores. Mathematical modeling and modeling mathematics. United States of America: NAtional Council of Teachers of Mathematics; 2016. p. 3-16.

Groshong K. Different types of mathematical models. En Hirsch C, McDufflie A, editores. Mathematical modeling and modeling mathematics. United States of America: National Council of Teachers of Mathematics; 2016. p. 17-24.

En Hirsch C, McDufflie A. Prefacio. En Hirsch C, McDufflie A, editores. Mathematical modeling and modeling mathematics. United States of America: NAtional Council of Teachers of Mathematics; 2016. p. ix-xii.

Blum W, Borromeo R. Advancing the teaching of mathematical modeling. En Hirsch C, McDufflie A, editores. Mathematical modeling and modeling mathematics. United States of America: National Council of Teachers of Mathematics; 2016. p. 65-76.

Proporcionalidad Directa con un Factor Fraccionario

José Luis Escobar Ignacio

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas
Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

Compartimos una experiencia de aula con dos estudiantes de secundaria, desarrollada durante la contingencia sanitaria. Se trabajó con proporcionalidad directa con factor fraccionario haciendo que los participantes vivieran la actividad de pintar banderas armando su propio color. Los estudiantes evidencian su razonamiento covariacional lineal y la modelación les amplia su visión sobre el uso de proporcionalidad en diversas actividades cotidiana.

Palabras Clave: Proporcionalidad directa, covariación lineal, factor fraccionario

Desde nuestra experiencia profesional en el nivel básico, consideramos importante que el alumnado tenga concepciones reales y no erróneas de los conceptos involucrados con la proporción directa. Coincidimos con Sánchez (2013) respecto a que el uso adecuado de definiciones de razones, proporciones y proporcionalidad, en un contexto o situación, facilita la comprensión de cualquier problema así como su solución. Según Lesh, Post y Behr (1988), el razonamiento proporcional permite estudiar situaciones de variación, cambio y covariación así como “la capacidad de procesar y almacenar mentalmente varias piezas de información” (p.93, citado en Sánchez, 2013a) mediante métodos del pensamiento cuantitativo así como del cualitativo. Para desarrollar este tipo de razonamiento, varias investigaciones coinciden en que es necesario apoyarse en el conocimiento intuitivo de los alumnos (Ben-Chaim, el al.,1998; citado en Silvestre & Da Ponte, 2011) con el fin de cuestionar posibles concepciones falsas que los llevan a involucrar proporcionalidad en fenómenos que no lo son.

Streefland (1984) afirma que el aprendizaje de las razones y las proporciones es un proceso de largo plazo que comienza con una comparación cualitativa donde se las reconozca; además, hace uso de recursos didácticos (figuras, dibujos, expresiones) que favorecen el desarrollo de patrones perceptuales” (citado en Ruiz & Valdemoros, 2006) y, sugiere los niños podrían reconocer mejor las proporciones a través de tareas que sean significativas, útiles y reales para ellos” (citado en Sánchez, 2013, p 69).

Nos cuestionamos entonces sobre si invitando a estudiantes de primer año de secundaria a jugar el rol de pintores y decidir sobre la cantidad de pintura que tienen que producir mezclando dos colores para obtener el color necesario, propiciaríamos el desarrollo de su razonamiento covariacional lineal así como ampliar su panorama matemático.

Marco Teórico

En esta experiencia de aula involucramos la modelación matemática para generar la situación de aprendizaje así como el desarrollo del razonamiento covariacional para analizar la apropiación de proporcionalidad directa con factor fraccionario en estudiantes de secundaria.

El uso de tablas de datos para organizar la información y representarla en un gráfico cartesiano serán medios para propiciar el desarrollo del razonamiento covariacional. Con ello, dar evidencias del análisis y comprensión de los participantes, observando el cambio que existe y como varían las magnitudes de manera simultánea, (Thomson & Carlson, 2017).

Es importante conocer cómo los estudiantes puedan encontrar las relaciones entre las cantidades, de acuerdo al análisis empleado, deben llegar a la resolución del problema, pensando de manera empírica o heurística en algún momento (Rueda & Parada, 2016). Es indispensable que el estudiante pruebe sus ideas y al manipular las cantidades, repita para que de manera autónoma pueda llegar a una refutación o bien valide por medio de la experimentación sus ideas.

Por otra parte, la modelación matemática, como propuesta metodológica de trabajo, propicia la vinculación entre actividades cotidianas y escolares ya que muchas situaciones en la vida cotidiana del estudiante requieren alguna solución matemática (Biembengut & Hien, 1999).

Con el desarrollo del proyecto, la intención es propiciar la modelación de situaciones reales o cotidianas de los estudiantes propiciando la capacidad de relacionar lo que se vive en la escuela con alguna actividad o problema surgido en su vida diaria.

Metodología

Para desarrollar esta experiencia de aula se siguieron las fases de la Ingeniería didáctica (Carnelli & Marino, 2006), a las que nos referiremos de manera sintética en este reporte.

Contexto y participantes

Debido a las limitantes emergentes de la contingencia del COVID-19, las actividades se planearon para 2 alumnos de secundaria. El trabajo fue presencial, pero con estrictas medidas de precaución tale como: distancia delimitada de 2 m, trabajo individual durante toda la sesión, uso de cubrebocas y gel antibacterial.

Los alumnos, (Alumno Y, Alumno J) cursan el primer grado en la Escuela Secundaria Gral. Rubén Mora Gutiérrez, de la comunidad de Las Vigas Municipio de San Marcos Gro.

Análisis Preliminar

En cuanto a la *dimensión didáctica*, se analizó el libro de texto que utilizan los estudiantes de la secundaria involucrada en esta experiencia, para tener pautas para el diseño de aprendizaje. En particular, revisamos el tipo de problemas que se proponen para "proporcionalidad directa" utilizando los constructos teóricos: *Problemas convencionales* (PC) que se caracterizan por ser cerrados tanto en el procedimiento, como en la solución y no le permiten al alumno indagar para resolverlo y *Problemas de Modelación Matemática* (PMM) cuyos planteamientos no muestran en su totalidad los datos para resolverlo, sino que el estudiante puede encontrar diversos procedimientos y diferentes soluciones, donde sus referencias son situaciones de la vida real (Valencia & Valenzuela 2017)

Observamos que la mayoría de los problemas propuestos por Carrasco y Martínez (2014) son del tipo PC, generalmente de valor faltante y llenado de tablas de datos. Algunos, propician utilizar distintas representaciones de la proporcionalidad directa como tablas de datos, donde se hace un registro de la variación y de cómo ocurre.

En cuanto a la *dimensión epistemológica y cognitiva,* nos apoyamos en la revisión de reportes de investigación mencionados.

Diseño de aprendizaje

Tema	**Lección**	**Eje**	**Contenido**	**Aprendizaje esperado**
Proporcionalidad y Funciones	Proporcionalidad Directa con un Factor Fraccionario	Manejo de la información	Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad directa de tipo "valor faltante" en diversos contextos, con factores constantes fraccionarios.	Extender el uso de la proporcionalidad directa en actividades cotidianas

Momento 1	**Momento 2**	**Momento 3**
Vídeo introductorio • Ejemplo, tablas de datos • Preguntas: ○ ¿Qué tipo de proporcionalidad se observa en las tablas? ○ ¿Qué puedes observar del cambio que ocurre? ○ ¿En qué otras situaciones de la tu vida cotidiana se presenta la proporcionalidad directa?	*Mezcla de pintura* • Problema: pintar bandera de México o de Brasil • Comparación de trabajos • Preguntas: ○ ¿Qué cantidad de color azul y amarillo usaste para la combinación? ○ Utilizaste esas cantidades para 1 bandera y si te solicitaran 2 banderas ¿Cuánta pintura azul y amarilla necesitarías? ○ ¿Y para 5 banderas? • Tabla de datos • Gráfica • Preguntas: ○ ¿Qué tipo de proporcionalidad se observa en la actividad que realizaste? ¿Por qué? ○ ¿Cómo varía la cantidad de pintura azul y amarilla con respecto a las banderas solicitadas? ○ ¿Consideras buena la idea de representar de esta forma la proporcionalidad directa?	*Combinación de distintos tonos* • Pregunta: ○ ¿Cómo creen que pueden representar la variación o cambio de las cantidades de pintura? • Tabla de datos • Gráfica • Preguntas: ○ ¿Cómo es la variación del color que te corresponde? ○ Si unes los puntos de la gráfica ¿Qué se forma? ¿Por qué? ○ ¿Qué puedes decir de la sesión de hoy? ○ ¿Dónde se puede ver representada la proporcionalidad directa en tu vida diaria?

Se realizó también el análisis *a priori*, mismo que no presentamos en este reporte, en el cuál sólo compartimos una relatoria de la experiencia de aula ya que el análisis *a posteriori* está en proceso.

Recolección de Datos

Se recolectaron los datos mediante la grabación de voz así como fotos de cada episodio que revele evidencia interesante a la experiencia. Se escanearon las producciones escritas de cada estudiante y se transcribieron los extractos identificados en el análisis de las grabaciones.

Relatoria de la experiencia

Momento 1

Se inició la actividad analizando un vídeo de cómo identificar la proporcionalidad directa e inversa, sus características y diferencias. Se mostraron tablas de datos, una de compra de refrescos y otra de un artesano de sombreros, como repaso del tema que ya conocían. Luego de unos minutos de análisis, se les cuestionó sobre el tipo de proporcionalidad que observan y si pueden cuantificar el cambio. Encotramos claridad en sus ideas ya que reconocen las variables involucradas y cómo cambian. Al cuestionar sobre otras actividades donde se presenta la propocionalidad directa, los estudiantes dan más ejemplos de compra y venta, no logran imaginar otro contexto confirmando lo esperado.

Momento 2

Los estudiantes comienzan a realizar sus combinaciones de colores midiendo la cantidad con las jeringas.. Utilizando una jeringa por color, se les solicita que utilicen sólo 5ml (una jeringa completa) entre los dos colores ya que inicialmente utilizan toda la jeringa (10ml). Esto les lleva a trabajar con “parte-todo” generando un acercamiento a cuanto falta en un color al decidir la cantidad del otro (Figura 1). Aparecen así mitades y cuartos en sus mediciones (Extracto 1).

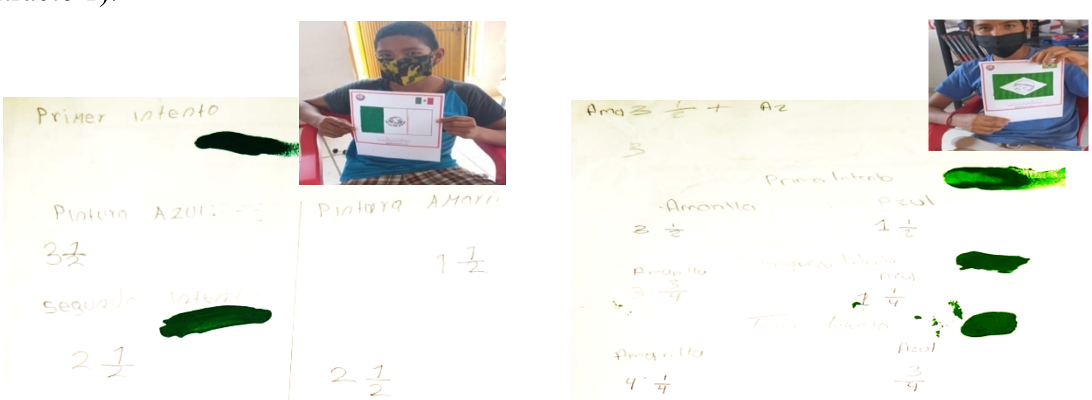


Fig. 1: Intentos de los alumnos para conseguir el tono correspondiente.

Extracto 1: Prueba y error para lograr color verde

Profesor: ¿Qué cantidad de color azul y amarillo usaste para la combinación?

Alumno Y: (bandera de Brasil) primero tomé $3\frac{1}{2} de\ amarilla + 1\frac{1}{2} de\ azul$, pero me dio un tono más fuerte, después aumenté el amarillo y baje el azul a $3\frac{3}{4} de\ amarillo\ a\ 1\frac{1}{4} de\ azul$, pero no cambió mucho, así que lo hice de nuevo, pero ahora $4\frac{1}{4} de\ amarilla + \frac{3}{4} de\ azul$ y fue donde salió un color similar a la bandera de Brasil.

Alumno J: (bandera de México) primero utilice $3\frac{1}{2} de\ azul + 1\frac{1}{2} de\ amarilla$, pero el me salió como un verde oscuro pero azulado, entonces lo hice de nuevo con $2\frac{1}{2} de\ azul + 2\frac{1}{2} de\ amarilla$ y me salió un tono muy parecido al de la bandera de México.

Lograda la mezcla y haber pintado la bandera correspondiente se los cuestiona sobre la cantidad de pintura que necesitarían para pintar 2 banderas. Se observa que ambos estudiantes duplican la cantidad de cada "parte" para lograr el doble del "todo", manteniendo sus datos como números mixtos (Extracto 2).

Extracto 2: Más banderas – más pintura

Profesor: … si te solicitaran 2 banderas ¿Cuánta pintura azul y amarilla necesitarías?

Alumno Y: en mi caso $8\frac{2}{4} de\ amarilla + 1\frac{2}{4} de\ azul$, darían los 10 ml para las 2 banderas.

Alumno J: yo ocuparía 5 ml de azul + 5 ml de amarilla.

Profesor: ¿y para 5 banderas?

Alumno J: $12\frac{1}{2} de\ azul + 12\frac{1}{2} de\ amarilla.$

Alumno Y: $21\frac{1}{4} de\ amarilla + 3\frac{3}{4} de\ azul.$

Se les solicita organizar sus datos en una tabla y graficar los puntos correspondientes a la cantidad de banderas. Ambos, unen los puntos con una línea utilizando el color correspondiente (Figura 2). Reconocen que se trata de una proporcionalidad directa "porque cuando incrementa el número de banderas, también incrementa la cantidad de pintura" (Alumno Y) y que ambas cantidades aumentan a ritmo constante (Extracto 3).

Extracto 3: Razón de cambio constante

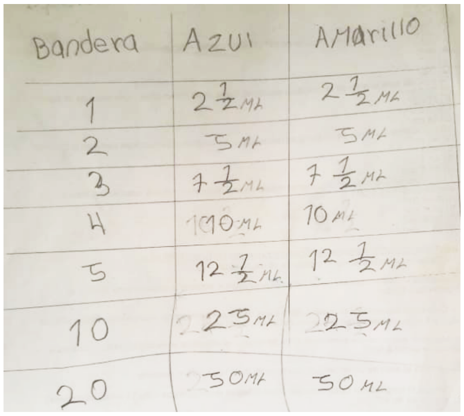
Profesor: ¿Cómo varia la cantidad de pintura azul y amarilla con respecto a las banderas solicitadas?

Alumno J: en mi caso, va aumentando $2\frac{1}{2}$ de pintura tanto amarilla cómo azul por bandera.

Alumno Y: y yo es de $4\frac{1}{4}\ de\ amarilla\ y\ \frac{3}{4} de\ azul$, es lo que aumenta por cada bandera.

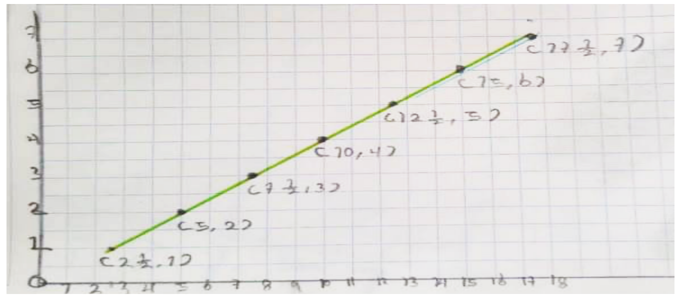
En la discusión de sus producciones, sobre la cantidad de pintura utilizada, el Alumno Y comenta que "es más fácil ver el crecimiento en la gráfica" en tanto que el Alumno J expresa que "la tabla de datos se me hace más fácil ver cómo va aumentando". Al indagar sobre cómo interpretan sus gráficas se percibe que las describen desde la razón de cambio (Extracto 4).

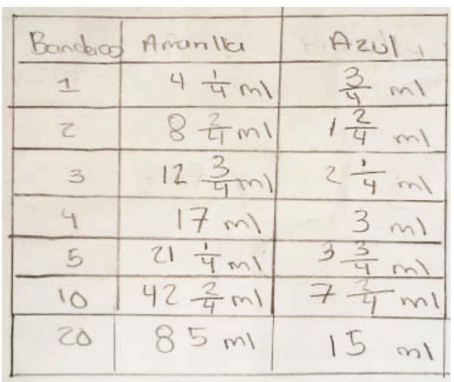
:



Bandera	Azul	Amarillo
1	$2\frac{1}{2}$ ml	$2\frac{1}{2}$ ml
2	5 ml	5 ml
3	$7\frac{1}{2}$ ml	$7\frac{1}{2}$ ml
4	10 ml	10 ml
5	$12\frac{1}{2}$ ml	$12\frac{1}{2}$ ml
10	25 ml	25 ml
20	50 ml	50 ml

Bandera de México





Bandera	Amarilla	Azul
1	$4\frac{1}{4}$ ml	$\frac{3}{4}$ ml
2	$8\frac{2}{4}$ ml	$1\frac{2}{4}$ ml
3	$12\frac{3}{4}$ ml	$2\frac{1}{4}$ ml
4	17 ml	3 ml
5	$21\frac{1}{4}$ ml	$3\frac{3}{4}$ ml
10	$42\frac{2}{4}$ ml	$7\frac{2}{4}$ ml
20	85 ml	15 ml

Bandera de Brasil

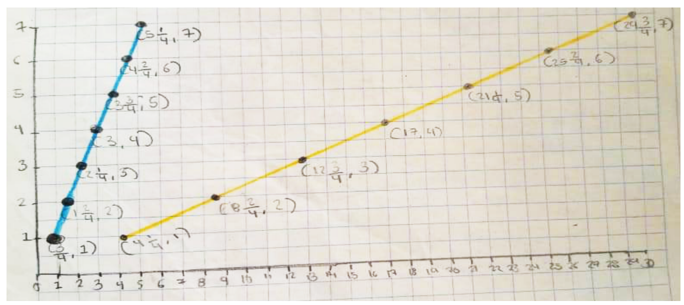


Fig. 3: Representaciones de los datos

Extracto 4: Razón de cambio como explicación.

Profesor: ¿Por qué crees que tu gráfica tiene ese comportamiento?

Alumno Y: en mi caso la gráfica azul, está más inclinada porque tiene menor cantidad de pintura y la amarilla está más acostada porque tiene mayor cantidad de pintura.

Alumno J: en el mío pasó algo raro, las dos gráficas pasan por los mismos puntos, pero ya sé por qué, es que siempre tienen la misma cantidad de pintura.

Ante la tarea de pintar 50 banderas, los estudiantes generan diferentes estrategias. Alumno J lo razona desde una progresión aritmética donde va manipulando la partición requerida siendo "la suma" la operación imperante. El Alumno Y, en cambio, utiliza una relación proporcional (Extracto 5).

Extracto 5: Estrategias para predecir cantidad de pintura

Profesor: … si se te solicitan 50 banderas ¿cómo calcularías la cantidad de colores utilizada de una manera sencilla?

Alumno J: (bandera de México) son muchas operaciones, por ejemplo, yo para llenar la tabla, primero hice desde la bandera 1 hasta la 5 sumándole $2\frac{1}{2}$ por cada bandera que incrementaba, para saber cuanta cantidad ocupo para 10 banderas, pues solo miré cuanto ocupé para 5 banderas, que en este caso fue $12\frac{1}{2}$ entonces el doble de $12\frac{1}{2}$ es 25 enteros, así encontré la cantidad que iba a utilizar, para 20 banderas pues serían 50 enteros porque es el doble de 10 banderas y para 50 banderas pues a la cantidad de que ocupo para 20 banderas le sumaría lo que ocupo para 5 banderas y eso lo duplicaría, pero es mucho profe.

Alumno Y: (bandera de Brasil), yo sé cómo hacerlo más fácil y rápido, con la regla de 3, así llené la tabla, primero convertí la fracción a decimal y luego use la regla de 3 y después volví a convertir de decimal a fracción, ya tengo el resultado para 50 banderas yo ocupo, $212\frac{2}{4}\,de\ pintura\ amarilla\ y\ 37\frac{2}{4}\ de\ pintura\ azul.$

Momento 3

Se les solicita a los alumnos que logren 8 tonos de verde, usando sólo 5 ml de pintura para cada tono, es decir, correspondan a una jeringa. Al Alumno J se le solicitó que comenzara con un tono de verde oscuro y llegara a uno más claro; y, que luego, graficara solamente el incremento de la cantidad de pintura amarilla. El Alumno Y tenía que iniciar con un tono verde claro y lograr un verde oscuro o intenso; y, luego, graficar solamente el incremento de la cantidad de pintura azul.

El Alumno Y (pintura azul) menciona: “va incrementando $\frac{2}{4}$ por cada tono” y que su gráfica es una línea “porque se van incrementando con la misma cantidad de pintura” (Figura 4).

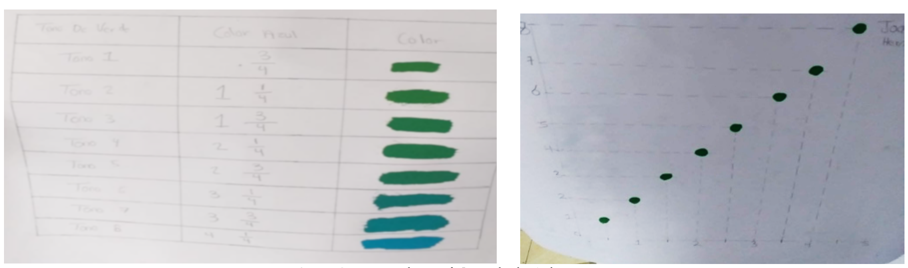


Fig. 4: Producción del Alumno Y

Por su parte, el Alumno J (pintura amarilla) comenta que: “va aumentando $\frac{1}{2}$ por cada tono” y explica que “aumenta la misma cantidad de pintura, por eso se forma la línea” (Figura 5).

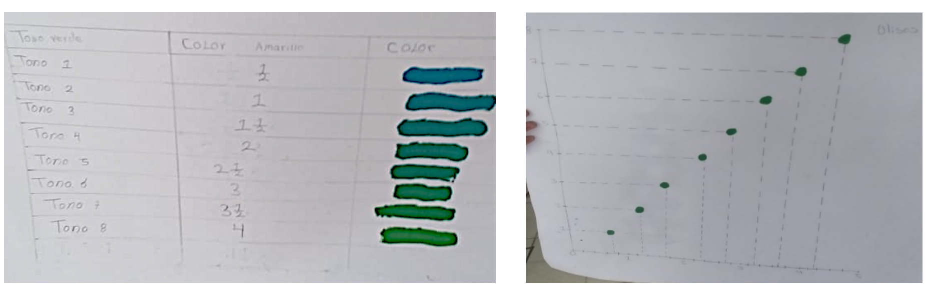


Fig. 5: Producción del Alumno Y

En la actividad ambos estudiantes incrementan la cantidad de pintura utilizando la mitad de la jeringa generando así una proporción directa. En cuanto a sus procedimientos vemos que hubo diversidad. Uno de ellos utiliza procedimiento matemáticos estudiados en el aula, y el otro resolviendo de manera empírica, trabajando con la heurística y el conocimiento divergente. Ambos utilizaron saberes matemáticos que sintetizamos en la Figura 6.

Fig. 6. Esquema de saberes Matemáticos detectados

Discusión y Conclusiones

Consideramos que el desarrollo de esta experiencia de aula nos da evidencia de que los estudiantes, de primer grado de secundaria, no tuvieron dificultades para trabajar la proporcionalidad directa con el factor fraccionario. Además, ampliaron sus ideas en cuanto a identificar distintas situaciones de su vida cotidiana, donde se requiere el uso de proporcionalidad directa y no sólo en la compra-venta de productos como lo mencionaron en el momento 1. Efectivamente, al cierre del momento 3, mencionaron otras actividades cotidianas donde se percibe la proporcionalidad directa (Extracto 6).

> *Extracto 6:* Otras actividades cotidianas que involucran proporcionalidad directa
> *Profesor:* ¿Dónde se puede ver representada la proporcionalidad directa en tu vida diaria?
> *Alumno Y:* en este caso sería si trabajo de pintor, pero fíjese profe pensándolo bien, en un Derby de gallos hay mucha proporcionalidad directa.
> *Profesor:* ¿Por qué?
> *Alumno Y:* es que mire, el Derby es de 4 gallos por partido, entonces, entre más partidos lleguen, aumenta 4 veces el número de gallos, también, por ejemplo, la inscripción al torneo digamos que es de $3000, por cada partido que llegue son $3000 más acumulados al premio y también por cada 2 partidos que lleguen es una pelea más para el torneo.

Investigar, documentarse, realizar una buena fundamentación, tanto teórica como metodológica, son puntos claves para el logro de los objetivos de un proyecto de enseñanza. Durante la aplicación de la actividad los estudiantes lograron un razonamiento proporcional, que les ayudó a solucionar los problemas en turno, dándonos la oportunidad de conocer a las personas por medio de sus formas de pensar, de analizar y de resolver una situación.

La experimentación con la pintura generó alumnos motivados, comprometidos, buscando diversas soluciones a los problemas, haciendo conclusiones acertadas, cumpliendo con el objetivo que era expandir la relación de la proporcionalidad directa con diferentes actividades o labores en sus vidas y sobre todo, escuchar que están planeando aplicar la proporcionalidad directa en otras actividades.

Por otro lado, nos deja reflexionando sobre invitar a los estudiantes a cuestionarse sobre la proporción de colores entre sí, lo cual generaría otro tipo de covariación que profundizaría sus conocimientos de proporción directa (covariación lineal) desde la otredad, la dilusión que propicia reflexionar sobre covariación logarítmica exponencial, ausente en el nivel secundaria.

Referencias bibliográficas

Biembengut, M. & Hien, N. (1999). Modelación Matemática: estrategia para Enseñar y aprender Matemáticas. *Educación Matemática 11*(1), 119-134.

Carnelli, G. & Marino, T. (2006). Ingeniería Didáctica. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Eds.): Ed*ucación Matemática* (pág. 39-62). Editorial Universitaria Villa Marina.

Carrasco, G. & Martínez, P. (2014). *Matemáticas 1*. México DF.: Santillana.

Rueda, N. y Parada, S. (2016). Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por ambientes de geometría dinámica. *Uni-pluri/versidad, 16*(1), 51-63.

Ruíz, E. & Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(2), 299-324.

Sánchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la Teoría Antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16*(1), 65-97.

Silvestre, A. & Da Ponte, J. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al razonamiento proporcional. *Revista Educación & Pedagogía* 23(59), 137-158.

Thompson, P.W. & Carlson, M.P. (2017). Variation, Covariation, and Functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai, (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Valencia, A. & Valenzuela, J. (2017). ¿A qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Un análisis de libros de texto. *Educación Matemática* 29(3), 52-78.

Secuencia de desarrollo de modelos para motivar el surgimiento de la noción de derivada de una función en un contexto agropecuario

Adriana del Carmen Luna Aldaco
Angelina Alvarado Monroy

Universidad Juárez del Estado de Durango
Facultad de Ciencias Exactas

Palabras clave: Actividades de Modelización, Educación Media Superior, Derivada de una función

El Modelo Educativo de la Educación Media Superior (EMS) vigente, puede considerarse que no responde con las necesidades presentes ni futuras de los jóvenes, en el sentido de que la enseñanza es dirigida por el profesor, dándole prioridad a la acumulación de conocimientos de forma homogénea y no al logro de aprendizajes significativos; por lo que se producen conocimientos aislados con poca aplicabilidad, relevancia, pertinencia y vigencia en la cotidianeidad de los estudiantes, derivando en aprendizajes poco profundos y sin importancia para ellos, lo que conlleva que estudien sólo para pasar las evaluaciones y luego de esto olvidan los contenidos estudiados (SEP, 2018). Debido a esto, en la EMS existe una desconexión entre la currícula de la materia y la manera en la que en realidad se imparten las clases, específicamente en los planteles de la Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar (UEMSTAyCM), se incluye en el currículo la asignatura denominada "Módulo profesional", orientada en su mayor parte mediante prácticas de su especialidad. Durante la experiencia de 9 años, de la primera autora de la propuesta, como docente de EMS en el bachillerato tecnológico agropecuario al trabajar con alumnos en la materia de cálculo diferencial, se ha observado que están acostumbrados a una enseñanza algorítmica y memorística. Esta forma de proceder, no manifiesta un razonamiento por parte del estudiante, ni un entendimiento de lo que plantea un problema, ni tampoco de lo que significa su solución. Esto, particularmente, acarrea la dificultad de entender el concepto de derivada para utilizarlo de manera efectiva en la resolución de situaciones contextualizadas de su área.

Lo anterior pone de manifiesto la necesidad de entender que los alumnos poseen distintos perfiles y habilidades que se requiere potenciar al centrarse en su pensamiento e intereses para que ellos mismos construyan su conocimiento, es por esto que se pretende motivar el surgimiento del sistema conceptual asociado a la derivada mediante proponer un diseño de una secuencia centrada en la modelización, utilizando situaciones enfocadas a su ambiente contextual, que es el agropecuario, tratando de emular la clase de cálculo diferencial a la clase de módulo profesional, pretendiendo obtener resultados similares de aprovechamiento teniendo como base los propósitos de la EMS.

Por tal motivo, se ha diseñado una secuencia de desarrollo de modelos en contextos agropecuarios, con los cuales los estudiantes están familiarizados de forma natural en sus ambientes culturales y sociales, con lo que se espera que les facilite y les permita el tratamiento de situaciones mediante la modelización matemática para lograr que surja la necesidad de adquirir un conocimiento nuevo que, posteriormente, sea revisado y refinado para llegar a la construcción del sistema conceptual asociado a la derivada y de esta manera pueda ser generalizado y utilizado para resolver distintas situaciones de su entorno. En concordancia con Niss et al. (2007), que sitúan a la modelización como una estrategia y alternativa para establecer una conexión entre el mundo real y el mundo matemático mediante interacciones con un área práctica de cualquier disciplina, que es relevante para un problema en particular, y "puede ser iterado varias veces, sobre la base de la validación y evaluación del modelo en relación con el dominio, hasta que las conclusiones resultantes relativas sean satisfactorias para el propósito de la construcción del modelo" (p. 4).

El propósito de esta ponencia es presentar el diseño de una secuencia de desarrollo de modelos, situada en un contexto agropecuario con la intención de provocar el surgimiento del sistema conceptual asociado a la derivada en estudiantes de un bachillerato tecnológico agropecuario.

Con esta propuesta se pretende beneficiar a los estudiantes, al incluir de manera sistemática, actividades de modelización matemática con la consideración de que la enseñanza - aprendizaje desde la modelización, es una manera dinámica y pragmática de introducir el significado de la derivada, utilizando un contexto cercano a ellos y de su interés. Mediante este tipo de actividades se espera encaminarlos para que vayan construyendo, revisando y refinando el concepto de derivada hasta lograr la comprensión del significado y los elementos que conlleva su sistema conceptual asociado, tales como límite, incremento, variación, entre otros, con lo que se propiciaría que pudieran aplicar y resolver problemas situados en un entorno agropecuario.

Revisión de literatura sobre la introducción de la derivada

Para Gutiérrez Mendoza, Buitrago Alemán y Ariza Nieves (2017), el cálculo diferencial es un área de las matemáticas que más aplicaciones tiene en cuanto a problemas reales, principalmente en la ingeniería, ya que estos conocimientos los aplican en cálculos de cantidades o magnitudes para resolver los requerimientos de un determinado problema. De igual manera, comentan que las funciones, las razones de cambio y la forma de interpretar y relacionar las variables que intervienen, también son fundamentales como herramientas requeridas para reconocer e interpretar datos matemáticamente y explicar los procesos que se llevan a cabo durante la resolución de un problema donde interviene el cambio en sus variables, reconociendo sus propiedades para ser capaces de desarrollar el pensamiento variacional y discernirlas en problemas que se ven afectados a cambios según las diferentes condiciones del entorno.

Para Gutiérrez Mendoza et al. (2017), la importancia de señalar que las estrategias didácticas utilizadas en las aulas tienen una gran influencia en el aprendizaje del cálculo y cualquier otra área, ya que “pueden convertirse en experiencias positivas o negativas para los estudiantes” (p. 139), lo que repercute en el entendimiento correcto del concepto de derivada para una futura aplicación, o en el problema que se genera al no tenerlo claro.

Debido a que la variación se toma como un proceso en el análisis de cambio instantáneo y cambio promedio a los que se asocian procesos de la naturaleza, y el concepto de derivada a través de su estudio en relación al análisis de fenómenos en los que conllevan un cambio, han permitido la caracterización y representación matemática de distintas situaciones problemáticas generadas a partir de un contexto sociocultural, y que se pueden describir de una manera tanto cualitativa como cuantitativa (Gutiérrez Mendoza et al. 2017). Pero al momento de que se les requiera a los alumnos resolver un ejercicio no rutinario, se complica la situación, debido a que lo más seguro es que al estudiante se le presenten situaciones donde tenga la necesidad de utilizar diferentes representaciones y transitar de unas a otras para poder llegar a la resolución de un problema (Hitt, 2005). En la secuencia que se propone en este trabajo se busca propiciar diferentes representaciones y la fluidez entre el paso de una a otra.

Por su parte, Gutiérrez Mendoza et al. (2017), proponen el uso de métodos heurísticos y modelación matemática para interpretar los diferentes cambios entre magnitudes muy pequeñas, ayudando con esto a los alumnos a comprender, interpretar y analizar un problema.

Para crear las condiciones académicas que favorezcan el proceso de enseñanza – aprendizaje acorde a esta época de cambios y avances tecnológicos, principalmente en matemáticas, debido a que en todas las carreras se contempla esta área, existe la tendencia de utilizar las TICs para abrir camino al desarrollo social, cultural y educativo, teniendo en cuenta que “el cambio se debe dar en las formas de transmitir los conocimientos, en las formas de conocer, de actuar y de enseñar, de modo que el estudiante aprenda de manera activa y participativa” (p. 142).

Las ideas de variación y covariación ya no se ajustan a los valores de las variables de la definición de función de hoy en día, ya que se establece en términos de pares ordenados y productos cartesianos, que es la definición de Dirichlet, según hacen referencia Thompson y Carlson (2017). También, ellos mencionan que Kaput (1994) “argumentó que las concepciones emergentes de los valores de las cantidades que varían continuamente eran fundamentales para la aparición del cálculo como cuerpo de pensamiento” (p. 422). Thompson y Carlson (2017), comentan que Freudenthal externó que los estudiantes no son capaces de desarrollar significados con variables, sin tener primero la idea de que las variables varían. Señalaron que las variables vistas como concepciones estáticas, son el origen de muchas dificultades por parte de los estudiantes para el uso del cálculo para modelar fenómenos físicos.

Siguiendo a estos autores, en el diseño de la secuencia que se propone se busca desarrollar un entendimiento previo en los estudiantes al proponer situaciones concretas y cercanas a ellos en las que puedan identificar cuáles variables cambian de manera simultánea.

Estas formas de pensar sobre la tasa de cambio, la función y la covarianza no son esenciales para que los estudiantes tengan éxito en los cursos de cálculo que enfatizan la memorización de procedimientos y reglas, pero tales cursos no tienen ningún significado inherente para los estudiantes con respecto a la construcción de una base conceptual.

Elementos metodológicos para conducir experimentos de diseño para la enseñanza

Acorde a lo tratado anteriormente, en este trabajo se propone una metodología de tipo cualitativa, pretendiendo tomar como sustento la Investigación Basada en el Diseño [IBD] (Bakker y van Eerde, 2015; Molina, Castro y Castro, 2006).

Para la IBD, las innovaciones educativas son el centro para el diseño y exploración de actividades, tomando en cuenta el uso de artefactos dentro de esas innovaciones para una mejor comprensión del proceso de aprendizaje. Ya que esta metodología se basa en el diseño, desarrollo y refinamiento de un producto o un proceso a través de ciclos iterativos, mediante observación, análisis y rediseño incluyendo fundamentos teóricos y, pretende comprender las relaciones entre la teoría educativa, la práctica y los artefactos educativos, considero que es una metodología adecuada para el diseño de la secuencia de actividades que se realizará, ya que al tomar como escenario un contexto agropecuario para llevar a cabo las prácticas y debido a que es un campo poco explorado en este sentido, y bajo estas circunstancias, se requiere introducir algo de innovación y mostrar la utilidad de los contenidos que se están enseñando mediante la realización de prácticas en lugares y con objetos con los cuales los alumnos estén familiarizados.

La IBD es una metodología apropiada para la realización del experimento de enseñanza que se pretende llevar a cabo a futuro. Ésta consta de las siguientes fases: preparación y diseño, experimento en el aula y análisis retrospectivo. Sin embargo, en esta ponencia sólo se abordará la primera fase. La población para la cual se diseñó la secuencia y se espera implementarla es un grupo de alumnos de cuarto semestre de la carrera de técnico agropecuario.

Diseño de la secuencia de desarrollo de modelos (SDM)

Para diseñar la secuencia se tomaron en cuenta referentes del contexto agropecuario (Zamorano, 1995; Urrutia, 2010; González y Caraballo, 2013) y la perspectiva de modelos y modelización de Lesh y Doerr (2003) quienes consideran que un modelo es un sistema conceptual que consiste de elementos, relaciones, operaciones e interacción de las reglas gobernantes, que son expresados usando sistemas de notaciones externas y que son usados para construir, describir o explicar el comportamiento de otros sistemas. Ellos proponen actividades detonadoras de modelos con el propósito de alentar a los estudiantes a revelar, probar, revisar o redefinir explícitamente aspectos importantes de su manera de pensar. Dichas actividades consideran principios de la realidad, autoevaluación, construcción y comunicación de diferentes modelos, así como generalización de modelos. Lesh y Doerr

(2003) consideran también que estas actividades no son suficientes y deben acompañarse de otras para desarrollar y refinar los modelos construidos. En este sentido, se consideró la organización de una SDM sugerida en la Figura 1.

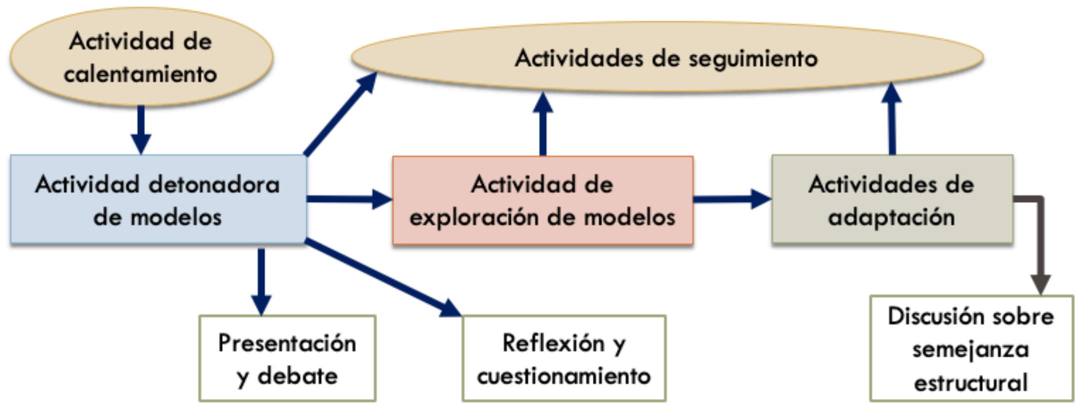


Figura 1 Secuencia de Desarrollo de Modelos adaptada de Lesh, Cramer, Doerr, Post y Zawojewski (2003).

Para introducir a los estudiantes al contexto se presenta una actividad de calentamiento que ofrece información sobre la importancia de los bebederos y los beneficios que pueden aportar las características de su diseño y las recomendaciones de colocación. Posteriormente, se presenta una actividad detonadora de modelos en la cual se pretende que los alumnos enfrenten una situación de optimización, explorando las distintas maneras de lograr que el bebedero llegue a su máxima capacidad a través de la modificación de sus medidas, partiendo de un material con dimensiones fijas ya especificadas. Finalmente, se plantea una actividad de exploración de modelos en la cual se utiliza el software Geogebra y se espera refinar y formalizar los modelos emergentes de la actividad detonadora de modelos.

Lo interesante en este tipo de tareas es que los estudiantes pueden explorarlas desde su conocimiento previo (formal e informal) para un entendimiento de la situación y pueden poner a prueba sus ideas con recipientes que ellos mismos construyan con distintas medidas de lados y de ángulos, para que lleguen a la construcción de lo que sería un bebedero con las medidas óptimas para una mayor capacidad de líquido mediante prueba y error, llevándolos con esto a la necesidad de encontrar un método más efectivo para lograr dicho objetivo sin tener que realizar tantos cálculos y llegar a obtener las medidas tan exactas como se requiera. En posteriores exploraciones de esta situación se pretende formalizar los conceptos que surgen y poder llegar a motivar el estudio de la derivada.

Referencias bibliográficas

Bakker, A., y van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner, C. Knipping, & N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education.* Springer.

González, C y Caraballo, H. (2013). *Matemática básica para ingeniería agronómica e ingeniería forestal*. 1a ed. La Plata: Universidad Nacional de La Plata. Recuperado: http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/32437/Documento_completo__.pdf?sequence=1

Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R. y Ariza Nieves, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. Revista Científica General José María Córdova, 15(20), 137-153. DOI: http://dx.doi.org/10.21830/19006586.170

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En Cortés, J. C. y Hitt, F. (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. (pp. 81-107). México: Morevallado Editores.

Mckenney, S., & Reeves, T. (2012). *Cunducting educational design research.* London: Routledge.

Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2006). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Seminario Metodologías de Investigación de Trabajos en Curso*, 1-12.

Ruiz, k., Cordóba-Rendón, C. (2014). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Recuperado de: https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1190.pdf

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H., Post, T., y Zawojewski, J. (2003). Model Development Sequences En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 35-59). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-59). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Secretaría de Educación Pública (2018). *Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior.* Campo disciplinar de matemáticas. Bachillerato tecnológico. Asignatura: Cálculo diferencial.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education*. (pp. 421-456). Reston, VA: NCTM.

Urrutia, L. (2010). Matemáticas aplicadas a la agricultura: Manual de ejercicios de matemáticas aplicadas a la agricultura. 2ª parte. Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora. Recuperado de: https://es.scribd.com/document/376008572/EjerciciosdeMatematicasAplicadasalaAgricultura

Zamorano (1995). Casos reales de matemática en la agricultura. Honduras: Escuela agrícola panamericana. Recuperado de: *https://bdigital.***zamorano***.edu/bitstream/11036/2551/1/207623_0311.pdf*