MEMORIA

Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

Tercer
Coloquio

Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

Volumen 3

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

MIPDM

3er.Coloquio
Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

UAGro
Universidad de Calidad con Inclusión Social

Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

Volumen 3

Editor

Marcela Ferrari Escolá

Coeditores

María Esther Magali Méndez Guevara

Nancy Marquina Molina

2022

Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

2022- Volumen 3

Editor
Marcela Ferrari Escolá

Coeditores
María Esther Magali Méndez Guevara
Nancy Marquina Molina

1era edición: Junio 2022

Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas es una publicación anual editada por la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas www.mipdm.uagro.mx

Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero
Carlos E. Adame 54 – La Garita. Acapulco, Guerrero, México. C.P. 39650
Contacto: mipdm@uagro.mx

Cada uno de los capítulos que integran el libro fueron sometidos a un proceso de arbitraje con especialistas en la materia, por lo que cuentan con el aval de un comité de arbitraje compuesto por los miembros del Núcleo Básico de la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas e investigadores invitados.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Agradecimientos

Esta obra ha sido posible gracias al apoyo institucional de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero que cobija a la *Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas* propiciando el espíritu de compartir saberes y reflexiones más allá de nuestra propia comunidad.

Agradecemos especialmente a Conacyt, por apoyar el desarrollo profesional de nuestros maestrantes a través de becas haciendo posible alcanzar sus metas y sueños como jóvenes profesores de matemáticas. Son ellos los autores principales de estas Memorias del Coloquio Anual donde se discuten su ideas, avances y reflexiones sobre cómo y por qué innovar la práctica docente de matemáticas.

Agradecemos también a los colegas del Núcleo Académico Básico de la *Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas* así como a los investigadores invitados quienes han acompañado el proceso de edición a través de críticas y recomendaciones para una mejora de los artículo que hoy se comparten en este volumen.

Comité científico

Dra. Yuridia Arellano García

M. C. Jorge Samuel Manuel Camacho Orihuela

Dra. Marcela Ferrari Escolá

Dr. Edgardo Locia Espinoza

Dr. José Efrén Marmolejo Valle

M. C. José Efrén Marmolejo Vega

C.Dra. Nancy Marquina Molina

Dra. María Esther Magali Méndez Guevara

M. C. Gema Rubí Moreno Alejandri

Dr. Hermes Nolasco Hesiquio

Presentación

Esta memoria de las *Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas* es el resultado del trabajo en conjunto de una comisión de estudiantes de la tercera y cuarta generación con un grupo de profesoras del Núcleo académico básico.

En esta tercera edición, se presentan algunos resultados y avances de investigación, derivados de los proyectos de investigación de la segunda y tercera generación de la Maestría en Innovación de la práctica docente de matemáticas. Así mismo, se presentan los resúmenes de dos conferencias impartidas por invitadas externas y de 4 talleres con diversidad de temáticas, todas estas actividades fueron presentadas de manera 100% virtual en el Tercer coloquio sobre innovación de la Práctica Docente de Matemáticas cuyo principal objetivo es generar un espacio donde nuestros estudiantes compartan desde sus experiencias en sus investigaciones con la comunidad educativa.

Las investigaciones aquí reportadas presentan una diversidad de problemáticas que se viven en el nivel medio superior y superior, destacando la importancia del desarrollo de diferentes tipos de razonamiento tal como el geométrico, el algebraico y el covariacional, así como del pensamiento estocástico y variacional. Las metodologías empleadas son muy diversas y los resultados presentados revelan la innovación en la práctica docente de los maestrantes por medio de diversas estrategias de enseñanza, con lo cual reflexionan y analizan su rol como docentes así como el papel que juega el uso de la tecnología en sus propuestas.

Es un gusto para nosotros compartir los resultados de las vivencias del tercer coloquio de innovación de la práctica docente de matemáticas, que a pesar de la contingencia sanitaria derivada por COVID-19, vimos que la investigación no se detuvo. Esperamos que las propuestas aquí presentadas los inviten a la reflexión sobre la innovación de la práctica como docentes de matemáticas

Atentamente

Comité editoriial

Junio de 2022

Contenido

Reflexiones sobre nociones geométricas en el aula

Relaciones de inclusión de cuadriláteros: propuesta de un taller en Secundaria[1]

Antonia Itzel Blanco Hurtado - Gema Rubí Moreno Alejandri

Diversas investigaciones evidencian que estudiantes de diferentes niveles educativos han presentado dificultades con las relaciones de inclusión de cuadriláteros. El objetivo principal de este proyecto de titulación es el diseño de un taller para estudiantes de segundo grado de secundaria, con el propósito de identificar el nivel de comprensión de las relaciones de inclusión de los cuadriláteros y, al mismo tiempo, favorecer la comprensión de este tipo de relaciones. El marco conceptual tiene como centro a los Q-niveles de comprensión (Fujita2011), centrados en el desarrollo de la relación jerárquica de cuadriláteros. La metodología de investigación utilizada es alusiva a los experimentos de enseñanza. En este artículo se muestran algunos resultados del análisis individual en el que se logra observar un progreso en el conocimiento inicial de los estudiantes y la presencia del fenómeno prototipo.

Palabras clave: relaciones de inclusión, cuadriláteros, niveles de comprensión.

Introducción

La actividad clasificar y la de definir resultan ser muy importantes en el desarrollo del pensamiento matemático. Ambas actividades son cercanas pues “las propiedades utilizadas para definir un concepto nos permiten incluir el concepto en una clase de objetos” (Blanco, 2018).

---

[1] Blanco Hurtado, A.I. y Moreno, G. (2022). Relaciones de inclusión de cuadriláteros: propuesta de un taller en Secundaria. En N. Marquina, M. Ferrari, & M. Méndez, (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 3* (pp. 1-18). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México.

A pesar de ser una actividad esencial, diversas investigaciones (Gruamann, 2005; Hansen & Pratt, 2005; Okasaki & Fujita, 2007; Fujita, 2011; Türnüklü, Akkas, & Gündoğdu, 2012 y Olkun & Toluk, 2004) evidencian la existencia de dificultades en torno a la clasificación (e incluso a la definición y caracterización) de cuadriláteros.

En general, dichos estudios evidencian diversas dificultades acerca de la clasificación de figuras geométricas como:

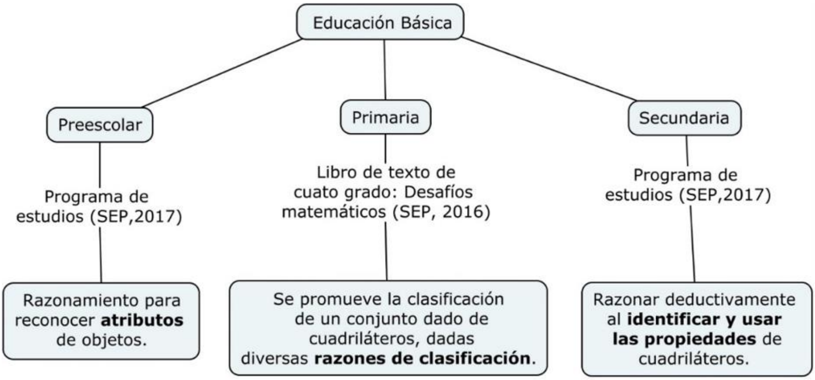
- Dificultad para aprender a analizar los atributos de diferentes conceptos cercanos y para distinguir entre aspectos esenciales y no esenciales.
- Reconocimiento y/o creación de formas prototípicas.
- Uso de varios atributos al definir.
- Dificultad en la comprensión de la relación entre los procesos de clasificar y definir.
- Complejidad de la capacidad de clasificar conceptos de diferentes maneras y poder etiquetarlas con nombres diferentes.
- Complejidad de comprender las relaciones transitivas entre conceptos.
- Necesidad de comprender la asimetría de las relaciones entre conceptos.

Este panorama muestra posibles dificultades que se podrían presentar en el Sistema Escolar Mexicano. En esa dirección, es de interés la forma en la que está presente la clasificación de conceptos en la educación básica. En particular, este proyecto se centra en los cuadriláteros.

En el Esquema 1 se muestran aprendizajes esperados y actividades relacionadas con la clasificación u ordenamientos de cuadriláteros en la Educación Básica y, en ellos se observan elementos importantes en las relaciones de inclusión de cuadriláteros: reconocimiento de características esenciales, establecimientos de criterios para la clasificación, así como la identificación y uso de sus propiedades.

De esta manera, el objeto de estudio de la investigación descansa en las dificultades de las relaciones de inclusión de cuadriláteros. Estas relaciones envuelven a las sistematizaciones, clasificaciones u ordenamientos de cuadriláteros que posean un sentido incluyente. También están presentes las características esenciales que se le asocian a los cuadriláteros, por lo que resulta de interés las descripciones, caracterizaciones o definiciones que se le otorgan.

Esquema 1.
Aprendizajes esperados y actividades relacionadas con la clasificación en la Educación Básica



En primer grado de secundaria, aun cuando la clasificación u ordenamientos de cuadriláteros no se declaran un contenido a abordar en un bloque específico del libro de texto se encuentra presente en diferentes contenidos como: unicidad y construcción de cuadriláteros, criterios de congruencia de cuadriláteros, y, construcción de fórmulas de área y perímetro de cuadriláteros. De manera que, para esta investigación, se eligió segundo grado. Así, el campo de acción se centra en segundo grado de la educación secundaria del Sistema Educativo Mexicano, restringido al eje Forma, espacio y medida.

El objetivo de esta investigación es construir un taller de actividades que promuevan la identificación de relaciones de inclusión de cuadriláteros en alumnos de segundo grado de secundaria.

En este contexto surge la interrogante: *¿Qué efectos tendrá en la comprensión de las relaciones de inclusión de cuadriláteros una propuesta didáctica apoyada en los Q-niveles de comprensión?*

Marco conceptual

En esta investigación se asume el modelo propuesto Fujita (2008) que permite explicar por qué la clasificación jerárquica de cuadriláteros es difícil para muchos alumnos y, a su vez, cómo se podría hacer frente a este problema.

Marco conceptual expuesto por Fujita

Fujita ha desarrollado diversas investigaciones (Okasaki & Fujita 2007, Fujita & Jones 2007, Fujita 2008, Fujita, 2011) en torno a los cuadriláteros, esto debido a que la definición y clasificación de estos resulta ser un tema difícil para estudiantes y maestros en formación inicial, dichas dificultades se suelen presentar debido a la complejidad de analizar e identificar características esenciales y no esenciales.

Fujita ha desarrollado estudios con estudiantes de Reino Unido y Japón con el objetivo de construir un marco teórico para describir el desarrollo cognitivo de los estudiantes acerca de su comprensión en las relaciones jerárquicas de cuadriláteros. Para la construcción de dicho mrco se basó en las ideas del modelo de Van Hiele y en los resultados empíricos de pruebas piloto.

Fujita (2011) propone un modelo en el cual toma en cuenta los conceptos figurativos y el fenómeno prototipo basados en los resultados empíricos de distintas pruebas piloto (Fujita & Jones, 2003; Fujita & Jones, 2007; Fujita, 2008).

Su modelo se basa en el propuesto por Van Hiele, creando así los niveles de comprensión de los cuadriláteros denominados *Q-niveles de comprensión* (Q(uadrilateral)-Level; ver Tabla 1), en los cuales se agrupan los Q-(Cuadrilátero) niveles declarados previamente (Fujita, 2008).

En esta investigación son un elemento medular los niveles (Q-uadrilátero nivel/niveles de comprensión) propuestos por Fujita (2008 y 2011), así como los componentes teóricos que están inmersos en estos niveles como el concepto, la imagen conceptual y la imagen conceptual evocada (Tall & Vinner, 1981). Es así como se plantea, considerando estos elementos conceptuales, diseñar un taller de actividades cuyo diseño favorezca la comprensión de las relaciones de inclusión en el nivel secundaria

Tabla 1.
Q- Niveles de comprensión.

Q-Nivel	Descripción
Jerárquica	Los alumnos pueden aceptar cuadrados, rectángulos y rombos como paralelogramos. Se entiende la relación de inclusión, así como las definiciones y atributos.
Parcial prototipo	Los alumnos han comenzado a ampliar sus conceptos figurativos. Por ejemplo, aceptan que los rombos también son paralelogramos, pero no cuadrados y rectángulos.
Prototipo	Tienen sus propios conceptos personales limitados.
0	Los alumnos no tienen conocimientos básicos de paralelogramos.

Nota: (Fujita, 2011, pág. 5)

Metodología

La metodología utilizada en esta investigación es la de los experimentos de enseñanza. Un experimento de enseñanza (Steffe y Tompson, 2000) consiste en una sucesión de episodios que incluyen "un agente de enseñanza, uno o más estudiantes, un testigo de los episodios de enseñanza y un método para registrar lo que sucede" (p. 273). A partir de lo registrado, se preparan episodios posteriores. Además, es posible obtener un análisis retrospectivo global.

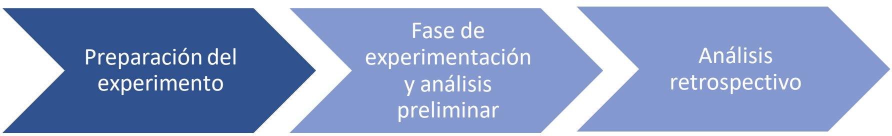
Algunas de las características centrales de los experimentos de enseñanza son las siguientes:

- *Profesor- investigador*. El doble papel del profesor proporciona oportunidades para que este desarrolle conocimiento a través de múltiples iteraciones de un ciclo de reflexión-interacción. En las sesiones de experimentación el investigador aplica a las interacciones con los estudiantes su conocimiento personal. Entre esos conocimientos personales del profesor también se incluyen las conjeturas iniciales. Este tipo de acciones posibilita a los investigadores mejorar su conocimiento de cómo aprenden los estudiantes.

- *Análisis continuos y retrospectivos*: En los experimentos de enseñanza se consideran dos tipos de análisis el primero es el continuo, el cual ocurre durante cada sesión y el segundo es el análisis retrospectivo es el que se realiza al final de todas las sesiones, cuando ya se tienen todos los resultados recabados.
- *Construcción del modelo:* El fin del experimento de enseñanza es la elaboración de un modelo explicativo del desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes, relacionado a un contenido específico.
- *Generación y prueba de hipótesis*: El experimento de enseñanza está conformado por ciclos continuos de generación y prueba de hipótesis, justamente son estás hipótesis o conjeturas son las que guían las interacciones realizadas en las sesiones.
- *Grabación:* La grabación de audio o la videograbación son fundamentales en este tipo de experimento, debido a que mediante este material se realizará un análisis acerca de lo acontecido durante la implementación del experimento.

De acuerdo con Cobb y Gravemeijer (2008), los experimentos de enseñanza tienen las siguientes fases:

Esquema 2.
Fases de los experimentos de enseñanza



Fuente: Adaptación de Cobb y Gravemeijer (2008)

Molina, Castro, Molina & Castro (2011), partiendo de su experiencia en la aplicación de esta metodología, indica las acciones correspondientes a cada una de las fases, dichas acciones se describen a continuación.

- *Preparación del experimento*. En esta fase se tienen que realizar las siguientes acciones: Definir el problema de investigación, justificar el interés y la necesidad de realizar este estudio, elegir, justificar la elección y describir a los sujetos participantes en el estudio, diseñar la secuencia de intervenciones en el aula así como su justificación, identificar metodologías de enseñanza adecuadas para el contenido a abordar en el aula de acuerdo a los objetivos planteados, elaborar hipótesis de investigación relativas al problema de estudio, identificar los objetivos concretos de la intervención a realizar, diseñar la siguiente intervención, justificar el diseño y la temporalización de la intervención, elaborar hipótesis sobre los resultados por obtener en la intervención.

- *Experimentación y análisis preliminar*. En esta fase se tienen que llevar a cabo las siguientes acciones: Realizar una recogida de datos exhaustiva mediante grabaciones en vídeo o en audio, recogida de las hojas de trabajo de los alumnos, toma de notas por un observador, modificar de forma justificada el diseño de la intervención, analizar los datos recogidos en el aula, contrastar los resultados con las hipótesis.
- *Análisis retrospectivo de las sesiones*. Las acciones por realizar en esta fase son: Realizar la trascripción de las grabaciones realizadas, organizar los datos recogidos, analizar todos los datos recogidos de forma conjunta, dar respuesta a los objetivos del estudio, contrastar los resultados con los obtenidos en otros estudios, elaborar un modelo que describa el aprendizaje o desarrollo de los alumnos a lo largo del experimento, si es necesario se ampliará la búsqueda bibliográfica realizada.

Con los elementos descritos se espera analizar los resultados con base al marco conceptual antes mencionado para lograr mediante aproximaciones sucesivas mejoras al diseño del taller. En este reporte, se muestran los resultados de la segunda prueba piloto implementada.

Participantes y contexto

Este diseño se aplicó a 13 estudiantes (8 mujeres y 5 hombres) de segundo año de secundaria de la institución privada Kids Center, se llevaron a cabo 6 sesiones síncronas de 50 minutos del 13 al 21 de septiembre de 2021 y se aplicaron 8 actividades en un tiempo total de 5 horas. Debido la pandemia por el COVID 19 el diseño se implementó en modalidad virtual a través de la plataforma Zoom.

Debido a los lineamientos planteados por la institución, las actividades se montaron en el Classroom de la profesora haciendo uso del correo institucional otorgado por la institución.

Tareas

Tomando como base los Q-Niveles de comprensión, las fases de la metodología, así como los resultados dos pruebas piloto2, se realizó la preparación de la secuencia didáctica en modalidad virtual. La secuencia se compone de 8 actividades (síncronas y asíncronas) en Classroom. A continuación, se describen cada una a partir de su intención didáctica.

- **Cuestionario diagnóstico:** Mediante un cuestionario indagaron las ideas iniciales de los estudiantes acerca de las relaciones entre familias de cuadriláteros y características esenciales que identificaron previo a la implementación de la propuesta.
- **Bloque de presentación:** De manera asíncrona se dio la bienvenida y se propició un ambiente de confianza mediante un vídeo de presentación y un foro de presentación.
- **Bloque de apertura:** Previo a la implementación de las actividades se tuvo un acercamiento con los estudiantes, y se garantizó una experiencia previa en el uso de GeoGebra.
- **Exploración de cuadriláteros:** Mediante el uso de un cuestionario se indagó si los estudiantes tenían conocimientos básicos acerca de los cuadriláteros (Q-Nivel de comprensión 0).
- **Adivinando el cuadrilátero desconocido:** Mediante un juego al estilo de "Adivina quién" se provocó la necesidad de utilizar características esenciales en la formulación de preguntas (Q-Nivel de comprensión prototipo).
- **Reconociendo propiedades:** Por medio de un cuestionario se profundizó en la reflexión acerca de diversas propiedades que tienen en común algunos cuadriláteros (Q-Nivel parcial prototipo).

[2] Con base a los resultados de las pruebas piloto se fortaleció el diseño del taller, además, se observó la presencia del fenómeno prototipo y el predominio de características no esenciales.

- **Construyendo cuadriláteros:** A partir de la construcción de un paralelogramo y de la exploración de un trapecio, se promueve el análisis de las relaciones entre concepto superior-concepto subordinado.
- **Ordenando cuadriláteros:** Mediante la construcción de un ordenamiento se espera promover las relaciones entre las familias de cuadriláteros estudiadas (Q-Nivel Jerárquico).
- **Casos particulares:** Mediante un cuestionario se espera institucionalizar las relaciones de inclusión de las familias de cuadriláteros que se analizaron en este taller (Q-Nivel 3-i/3-ii o Q-Nivel Jerárquico).

Recolección de datos

Para el análisis de las actividades se recopilaron las evidencias reportadas en Classroom, la guía de observación, así como los videos y transcripciones de lo sucedido en cada una de las sesiones.

Algunos resultados

Un punto relevante es que se realizaron dos análisis, uno *global* donde se describen los resultados obtenidos al realizar el análisis con los instrumentos previamente diseñados y, otro *individual*, que examina el desempeño de cada estudiante en las actividades con la finalidad de observar el progreso de acuerdo con los niveles de comprensión propuestos por Fujita (2011).

Este artículo centrará la atención en mostrar algunos de los casos más relevantes del análisis individual. Cabe destacar que para la dimensión individual se realizó una clasificación de acuerdo con los alcances logrados en las actividades, obteniendo así tres casos: a) Estudiantes que en su mayoría no entregaron evidencias y sus aportaciones se limitan afirmar o descartar lo que mencionaban los demás compañeros durante las actividades, b) Estudiantes que entregaron la mayoría de la evidencia sin embargo les hizo falta subir algunas actividades, pero en la sesión síncrona dieron aportaciones relevantes y c) Estudiantes que entregan todas las evidencias de las actividades y que tuvieron aportaciones relevantes. A continuación, se presentan un resultado del caso B (E3) y otro del caso C (E5).

Caso B: Análisis de E3

Se observó que, al inicio del taller, E3 tenía conocimientos básicos acerca de los cuadriláteros, por ejemplo, identificó que cuadrados, rectángulos y rombos son parte de los paralelogramos y mostro dudas acerca de la relación rombo-cuadrado. Sin embargo, en la identificación de paralelogramos se pudo observar que no incluyó a uno de los rombos (la figura con la etiqueta 18). Incluso esta exclusión también se presentó en la identificación de los rombos, lo que muestra que al ser un rombo en una posición no habitual el estudiante no logró identificarla dado que no tiene solidez acerca de las características esenciales. En esta dirección en la sección de definición hace uso de características esenciales en la mayoría de los casos. Con base a esto se puede decir que E3 se encuentra en el Q-nivel de comprensión prototipo.

En el diagrama propuesto en la segunda parte del reto 2, propiedades geométricas como la igualdad de lados y el tipo de ángulo, por ejemplo, en el primer nivel la característica es acerca de la igualdad de lados la cual es del tipo esencial. Sin embargo, se asocia de manera inmediata con el cuadrado generando así una clasificación excluyente dado que no toma en cuenta al rombo. Mientras que la segunda característica es acerca de los ángulos diferentes y lo asocia a los trapecios. Es decir, que no toma en cuenta a toda la extensión del concepto cuadrilátero, así como en la extensión de cada nivel del diagrama. En consecuencia, se obtiene una clasificación excluyente.

En las aportaciones del reto 3 “Reconociendo propiedades comunes”, realizó algunas aportaciones, sin embargo, no profundizó en ello. Por otro lado, se puede apreciar que en este reto E3 empezó a reflexionar acerca de las características esenciales que tienen ciertas familias como que el trapecio no posee ángulos opuestos iguales, que el cuadrado posee 2 pares de lados paralelos, o bien reflexionó que no todos los miembros de la familia de los paralelogramos cumplen con determinada condición. En consecuencia, E3 mostró argumentos correspondientes al Q-nivel de comprensión parcial prototipo.

En el reto "Ordenando cuadriláteros", mediante la reflexión de las preguntas realizadas por la profesora, E3 logró reflexionar acerca de la relación rectángulo-cuadrado, así mismo logró identificar a algunos miembros de la familia de los paralelogramos. Así que E3 se pudo colocar en el *Q-nivel de comprensión jerárquica* de manera parcial debido a que hizo falta la reflexión en torno a la relación cuadrado-rombo. Se destaca que en la explicación del diagrama E3 explicó dicha relación, pero justificándolo con características prototípicas: *el cuadrado qué es* ***un paralelo que cumple con sus 4 lados*** *y que si lo* ***volteamos se puede convertir en un rombo*** *que son 2 pares diferentes y que se pueden diferenciar por sus ángulos.*

Por último, en el reto "Repasando ideas" parece no haber avances, sin embargo, esto quizá se debe a que al ser una sección totalmente igual al presentado al inicio del taller E3 se haya confundido y en consecuencia colocó las mismas respuestas.

Tomando en cuenta lo obtenido en la sesión síncrona correspondiente al reto anterior se observó que hubo un progreso en las ideas iniciales dado que identificó características esenciales de las familias de los cuadriláteros, así como algunas relaciones entre estas familias. Con base a estos elementos se puede concluir que E3 al final del taller se encuentra de manera parcial en el *Q-nivel de compresión jerárquica.*

Caso C: Análisis de E5

Con base en los resultados obtenidos en el reto de exploración se observó que E5 reconoció algunas relaciones entre las familias de paralelogramos. Además, en la identificación de paralelogramos mostró pocas debilidades (trapecio, rombo y rectángulo). Respecto al tipo de definición propuesta se basó tanto en características esenciales como no esenciales. Es por ello que al inicio del taller E5 se encontró en el Q-nivel de comprensión parcial prototipo.

Mientras que en el reto "Adivinando el cuadrilátero desconocido el juego", propone una característica que no corresponde a los cuadriláteros (tener 5 vértices). Se destaca que logró identificar a aquellos cuadriláteros que cumplen o no las preguntas planteadas. Por otra parte, se resalta que E5 logró promover una estrategia durante el juego que consistió en suponer ambas respuestas para analizar que cuadriláteros quedarían descartados. En esta actividad sigue estando presente características asociadas al Q-nivel de comprensión parcial prototipo.

Este nivel se sigue haciendo presente en el reto "Adivinando el cuadrilátero desconocido: creando una estrategia", en el que la primera característica es del tipo esencial (paralelismo) y logró identificar parte de la extensión, por otro lado, en la segunda característica corresponde a la propiedad geométrica ángulos obtusos y en este caso no mencionó a todos los elementos de la extensión.

En el reto "Reconociendo propiedades comunes" identificó a algunas familias de cuadriláteros que cumplen ciertas condiciones (al menos 2 lados opuestos paralelos, ángulos opuestos iguales, 4 lados iguales, 2 pares de lados opuestos paralelos y ángulos rectos). Por otra parte, mostró ideas erróneas al señalar que existen paralelogramos irregulares y que estos cumplían determinadas condiciones (ángulos rectos, más de 2 líneas de simetría, solo un par de lados paralelos). Con base en estos elementos se puede observar que E5 se arribó al Q-nivel de comprensión parcial prototipo.

Posteriormente, en el reto "Construyendo cuadriláteros parte 1" realizó pocas aportaciones. En una de ellas afirmó que la construcción de uno de los estudiantes (E10) es un paralelogramo dado que la construcción consta de un rectángulo, sin embargo, no identificó el caso general del paralelogramo (el romboide). En esa dirección, E5 mencionó algunas características del paralelogramo, pero no la más general (paralelismo), en este caso se basó solamente en la igualdad de los lados opuestos.

En el reto "Construyendo cuadriláteros. Parte 2" agregó al rombo a la extensión del paralelogramo (dado que habían mencionado al cuadrado y rectángulo). Cabe destacar que en este caso logró complementar las características esenciales referentes al paralelogramo dado que incluyó el paralelismo, además de la igualdad de lados opuestos. Respecto a la relación paralelogramo-trapecio identificó algunas características comunes como: cantidad de lados y ángulos en común. En este reto se evidenció un avance en las características esenciales del concepto paralelogramo, es por ello que se concluye que E5 se introduce en el Q-nivel de comprensión jerárquica.

Justamente en el reto "Relacionado cuadriláteros" se observó que este Q-nivel siguió prevaleciendo dado que E5 reflexionó acerca de la relación rombo-cuadrado. También, identificó que el rombo es el concepto superior del cuadrado y que el cuadrado es un rombo con ángulos de 90°.

Finalmente, en el reto "Repaso de ideas" esta última idea se hizo presente (el cuadrado es un rombo con ángulos de 90°) lo cual amplió la justificación inicial del reto de exploración donde el argumento era la igualdad de lados, en este caso se logró apreciar una justificación que permite ver la relación concepto superior-subconcepto. Nuevamente logró incluir al cuadrado, rombo y rectángulo como parte de los paralelogramos. Con base a estos resultados se puede concluir que al finalizar el taller E5 se encuentra en el Q-nivel de comprensión jerárquica.

Conclusiones

El análisis individual mostró que, mediante las actividades, la discusión y reflexión planteadas en el taller se logró un avance en las ideas que los jóvenes tenían acerca de los cuadriláteros pues en la mayoría de los casos se observó progreso en los Q-niveles de comprensión. Por ejemplo, de pasar del nivel prototipo al jerárquico (5 estudiantes), del Q-nivel parcial prototipo al jerárquico (2 estudiantes) y del Q- nivel de comprensión prototipo al Q-nivel de comprensión parcial prototipo (4 estudiantes).

En general, las actividades planteadas lograron promover la reflexión de las relaciones de inclusión de los cuadriláteros, así como analizar una parte de la extensión del concepto cuadrilátero. Es importante destacar que, con estas actividades a diferencia de las presentadas en los libros de texto, permiten que sea el estudiante el que proponga características esenciales, reflexionar en las características que comparten ciertas familias de cuadriláteros y realizar un ordenamiento incluyente (en lugar de que se les muestre uno ya realizado).

Este tipo de actividades se pueden proponer en los libros de texto con la finalidad de promover las relaciones de inclusión, pero donde el estudiante sea participe en el proceso de clasificación.

Si bien con este diseño de actividades se lograron parte de los objetivos planteados es importante destacar que con el análisis de lo sucedido se notaron aspectos por mejorar en las actividades, como el planteamiento de las indicaciones, la búsqueda de recursos tecnológicos, subsanar errores didácticos, incluso el planteamiento de las preguntas de reflexión por parte del profesor.

Esta investigación deja diversas líneas abiertas para trabajar a futuro, entre las cuales se observan:

- Realizar el rediseño del taller con base a los resultados obtenidos y a las observaciones realizadas.
- Implementar las actividades en un ambiente totalmente de taller, es decir en un ambiente que no se encuentre sujeto a los horarios escolares dados por la institución.
- Analizar las relaciones de inclusión en otros objetos matemáticos, no necesariamente geométricos.

En esa dirección, se observaron algunos aspectos para tomar en cuenta en un futuro rediseño, a continuación, se enlistas los aspectos más relevantes:

- Es necesario agregar a la familia de los trapezoides dentro de las secciones iniciales, ya que, si bien se agregó un trapezoide en el conjunto, este concepto se omitió en las preguntas y en el resto de las actividades del taller. Este concepto resultará conveniente para poder abordar completamente la extensión del concepto cuadrilátero.
- Reflexionar en el instrumento de intercambio de información del juego adivinando el cuadrilátero desconocido, dado que se presentaron diversas dudas como dónde debían colocar la respuesta a la pregunta realizada por el equipo contrario y, a la vez, dónde se encontraba la respuesta contestada por el equipo contrario. Podría llevarse a cabo mediante un formulario por cada pregunta del esquema o bien explicar preliminarmente su función mediante el uso de un vídeo y de esa manera se logren despejar las dudas que surgieron.
- En el reto conociendo propiedades comunes se debe agregar la condición "ningún par de paralelas" esto para incorporar a los trapezoides, debido a que el dejar a esta familia de lado, ocasionó que no se contemplará a toda la extensión de los cuadriláteros, esto sin duda repercutió en las actividades finales.
- Reflexionar es acerca de los recursos a utilizar para el reto "relacionando cuadriláteros", en este caso se puede proponer el uso de alguna pizarra digital como Jamboard.

Referencias bibliográficas

Cobb, P. & Grvemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fujita, T. & Jones, K. (2003) The place of experimental tasks in geometry teaching: learning from the textbooks design of the early 20th Century, Research in Mathematics Education, 5, 47-62.

Fujita, T. (2011). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*. doi: 10.1016/j.jmathb.2011.08.003

Fujita, T., & Jones, K. (2007), Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education,* 9(2), 3-20.

Fujita, T., (2008). Learners' Understanding of the Hierarchical Classification of Quadrilaterals. En M. Joubert (Ed.): Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 28(2) (pp. 31-36).

Graumann, G. (2005). Investigating and ordering quadrilaterals and their analogies in space—problem fields with various aspects. ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, 37(3), 190–198.

Hansen, A., & Pratt, D. (2005). *How do we provide tasks for children to explore the definitions of quadrilaterals?* from http://www.merga.net.au/documents/RP442005.pdf

Molina, M., Castro, E., Molina, J. & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), 75-88. https://core.ac.uk/download/pdf/12341974.pdf

Okasaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. En J. Woo, H, Lew, K, Park, & D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 41-48). Corea del Sur, Seoul: PME.

Olkun, S., & Toluk, Z. (2004). Teacher Questioning with an Appropriate Manipulative May Make a Big Difference. *IUMPST: The Journal*, 2 (1), 1-11

SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* México: Secretaría de Educación Pública.

Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151-169.

Tüřnüklü̈, E., Akkas, E. & Gündoğdu, F. (2012). Mathematics teachers' perceptions of quadrilaterals and understanding the inclusion relations. En J. da Ponte y F.

Arzarello (Eds). Proceedings of the *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education. Turquia.*

El Modelo de Van Hiele para conocer el nivel de razonamiento de los alumnos de bachillerato tecnológico[3]

José Carlos Cruz Apreza – Hermes Nolasco Hesiquio

Se utilizó el modelo de Van Hiele (1957, 1986) el cuál, es descriptivo, pues se permitió identificar los niveles de razonamiento geométrico de los sujetos y así valorar su progreso. Así mismo, se utilizan las características de esos niveles propuestas por Gutiérrez (1990) para la geometría de sólidos, el desarrollo del razonamiento geométrico de Gutiérrez y Jaime (1989, 1998, 2021) y las clasificaciones de los mismos propuestas por Guillén (2000, 2001, 2004). La metodología tiene que ver con identificar los niveles de razonamiento que tienen los estudiantes desde el punto de vista del razonamiento geométrico haciendo uso de un software de geometría dinámica "GeoGebra"

Palabras clave: Niveles de razonamiento geométrico, geometría dinámica, clasificación de sólidos.

Introducción

Desde la década de los 90´s hasta la fecha, existe interés en realizar estudios acerca de nuevas formas de enseñar la geometría a los alumno (Gutiérrez & Jaime, 1989, 1998, 2021), en su mayoría experimentales, que han contribuido en desarrollar una metodología de enseñanza más acertada en el contexto escolar. Sin embargo, muchas veces no hay forma de conseguir que los estudiantes comprendan algún concepto o idea nueva; otras veces, parece

[3] Cruz Apreza, J.C., A.I. y Nolasco, H. (2022). El Modelo de Van Hiele para conocer el nivel de razonamiento de los alumnos de Bachillerato tecnológico. En N. Marquina, M. Ferrari & M. Méndez, (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 3* (pp. 19-38). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México

que los conceptos o propiedades que el profesor les presenta, no son capaces de usarlos sino en ejemplos idénticos a los resueltos con la ayuda del profesor; los estudiantes pueden resolver problemas concretos con bastante habilidad, pero carecen de ideas cuando deben resolver esos mismos problemas planteados en un contexto algo diferente, abstracto, o más formal.

Otra situación típica de las clases de matemáticas es la de los estudiantes que tienen que recurrir a memorizar las demostraciones de los teoremas o las formas de resolver los problemas algorítmicamente a través de una serie de pasos, todo para poder aprobar sus exámenes (Jaime y Gutierrez, 1994). De igual manera, son de sobra conocidas las dificultades con que se encuentran los profesores de Matemáticas de Enseñanza en Secundaria para conseguir que sus alumnos comprendan los temas que estudian y puedan ir más allá de la simple memorización de las definiciones, demostraciones, algoritmos o métodos de resolución de ejercicios. Convirtiendo a la clase de matemáticas en una simple materia de memorización (Gutiérrez, 1990)

La geometría ha sido relegada a un segundo plano en la enseñanza, los métodos de trabajo que utiliza un matemático no se pueden llevar a las clases de primaria o secundaria; incluso en la universidad, sólo son adecuados para cursos especializados para estudiantes de matemáticas o con habilidades matemáticas. Por lo tanto, las metodologías formales de los matemáticos se sustituyen por otras metodologías escolares, adaptaciones o transformaciones de ellas, que pueden ser comprendidas y utilizadas por los estudiantes. (Gutiérrez y Jaime, 1998) Gracias a la transposición didáctica de Chevallard (1985) se puede llevar el conocimiento puro matemático a un contexto escolar traducido en un lenguaje plausible para los alumnos.

Marco Teórico

La teoría de Van Hiele tiene su origen en las disertaciones doctorales de Dina Van Hiele-Geldof y su esposo, Pierre Van Hiele, en la Universidad de Utrecht, Holanda, en 1957.

El modelo de Van Hiele (1957, 1986) presenta dos aspectos básicos:

- Es descriptivo, pues se identifican las diferentes formas de razonamiento geométrico de los sujetos y se puede valorar su progreso.
- Es instructivo, pues indica las pautas a seguir por el profesorado para que el avance del alumno esté presente.

El núcleo del modelo se centra en la determinación de la evolución del razonamiento geométrico de los sujetos mediante cinco niveles consecutivos, que tienen que ir superando correlativamente para poder pasar al siguiente. Se trata de un proceso lento que puede llevar incluso años, en el que se va pasando de un nivel al siguiente, sin que exista la posibilidad de saltarse ninguno de ellos (Van Hiele, 1957). Cada nivel supone la comprensión y razonamiento geométrico por parte del estudiante de un modo distinto, por lo que su manera de definir, interpretar y demostrar los conceptos varía.

A continuación, se describen cada uno de los niveles:

1. *Reconocimiento o visualización*: El estudiante no diferencia partes de las figuras geométricas, sino que conoce las formas como un todo.
2. *Análisis:* El estudiante reconoce las formas, pero no establece relaciones entre propiedades de distintas familias de figuras.
3. *Deducción formal u orden*: El individuo determina las figuras por sus propiedades, construye interrelaciones, pero aún su razonamiento está basado en la manipulación.
4. *Deducción*: El alumnado puede realizar deducciones y demostraciones lógicas y formales, entiende la naturaleza axiomática.
5. *Rigor:* Capta la geometría en forma abstracta, capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas de deducción y realizar una comparativa. Es un nivel alcanzado por estudiantes universitarios con

aptitudes geométricas. Por lo que, en muchas de las investigaciones y estudios en estudiantes no universitarios, este nivel no se incluye.

Así como también cuatro características, las más importantes de la teoría son:

- *Orden fijo*: El orden de progreso de los alumnos a lo largo de los niveles de pensamiento es invariante. En otras palabras, un alumno no puede alcanzar el nivel n sin haber pasado por el nivel n-1.
- *Adyacencia:* En cada nivel de pensamiento lo que era intrínseco en el nivel precedente se vuelve extrínseco en el nivel actual.
- *Distinción:* Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y su propia red de relaciones que conectan esos símbolos.
- *Separación:* Dos personas que razonan en niveles diferentes no pueden entenderse

Según Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) una vez que la experiencia del estudiante va creciendo, este entra en el grado intermedio de adquisición, aunque debido a la falta aún de experiencia los estudiantes pueden tener dificultades en la resolución de ciertos problemas. Sin embargo, para saber con certeza lo anterior, se debe conocer la manera de evaluación de los grados, se parte de que es más importante observar los tipos de razonamiento de los estudiantes que la habilidad que tengan para resolver ciertos problemas correctamente en un determinado tiempo. (Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991).

Usiskin (1982, citado por Gutiérrez y Jaime, 1998) realizó un primer intento, diseñando un test de múltiples respuestas a responder a mano, en el cual cada pregunta evaluaba un nivel específico de razonamiento. Las respuestas se marcaron como válidas o nulas, y los estudiantes fueron predesignados a un nivel específico de Van Hiele dependiendo del número de respuestas acertadas en cada nivel.

Años más tarde, Burguer y Shaughnessy (1986, citado por Gutiérrez y Jaime, 1988), trabajaron en el lado opuesto del espectro de posibilidades, creando cuestionarios basados en una serie de problemas y entrevistas semi-estructuradas.

En cada problema, las respuestas de los estudiantes se analizaron y se les asignó un nivel de Van Hiele en base al nivel dominante en la respuesta. Finalmente, de todos los niveles asignados al estudiante en cada una de las preguntas, una media de los niveles fue asignado al estudiante.

El trabajo de Gutiérrez y Jaime (1998) trata de determinar los requerimientos de un test que permita evaluar los niveles de van Hiele de la forma más adecuada. Su trabajo propone preguntas de múltiples respuestas con las ventajas de las entrevistas semi-estructuradas, con el fin de dar la posibilidad al alumno de explicar su respuesta y manifestar su nivel de razonamiento geométrico.

Dichos requerimientos incluyen:

- Evaluar los cinco procesos clave mencionados previamente (reconocimiento, formulación y uso de las definiciones, clasificación y prueba)
- Evaluar los cuatro primeros niveles de razonamiento, es decir, cada estudiante debe tener la posibilidad de responder las preguntas acordes a su máxima capacidad de razonamiento.
- Proporcionar al estudiante la posibilidad de expresar las razones del porqué de sus respuestas, de esta manera el investigador es capaz de determinar qué nivel de razonamiento se esconde tras cada respuesta.

Es importante identificar los niveles, los procesos clave y permitirle al estudiante que exprese la razón que lo llevó a responder de cierta manera.

Metodología

Pierre Van Hiele propuso cinco fases que pueden guiar al maestro o profesor en el diseño y facilitación de experiencias de aprendizajes apropiadas para que el estudiante progrese en matemática. Las "fases de aprendizaje" son etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento.

Las fases de aprendizaje propuestas por Van Hiele (1957) son:

1. *Información:* Se trata de una fase de toma de contacto: el profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho.

Esta fase sirve para dirigir la atención de los estudiantes y permitirles que sepan qué tipo de trabajo van a hacer, y para que el profesor descubra qué nivel de razonamiento tienen sus alumnos en el nuevo tema y qué saben del mismo.

2. *Orientación dirigida*: En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc. principales en el área de la geometría que están estudiando.

Las actividades que se les propongan deben estar convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de forma progresiva.

3. *Explicitación*: Entre las finalidades principales de esta fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo.

Es conveniente que surjan puntos de vista distintos, debido a que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), que ordenarlas y que expresarlas con claridad.

4. *Orientación libre:* En este momento los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El profesor debe plantear problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones, para de esta forma perfeccionar los conocimientos que los estudiantes poseen sobre el campo de estudio.

En estos problemas se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores.

5. *Integración*: en esta fase los estudiantes deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento.

En esta fase el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto o propiedad nuevos al estudiante: Solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce.

Es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario) con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos.

Tomando en cuenta esas fases de aprendizaje, se diseñaron las actividades para desarrollar este proyecto. Así mismo, las TIC's han entrado en las clases de matemáticas, principalmente en forma de ordenadores, calculadoras, tabletas y celulares que, mediante programas informáticos, permiten manejar grandes cantidades de información, organizarla, realizar gráficas, representar objetos matemáticos e interactuar con ellos, entre otros. La situación especial que estamos viviendo durante el último año, provocada por la pandemia de la COVID-19, de una manera dramática e indiscutible, ha mostrado la necesidad de realizar acciones para la integración real de las TIC's en la actividad cotidiana de profesores y estudiantes de matemáticas. Creando escenarios favorables para el uso de programas especializados de geometría plana y espacial. Se utiliza GeoGebra para esta actividad como entorno tridimensional que le permita al alumno manipular un cuerpo geométrico para evidenciar su nivel razonamiento al enunciar sus características. Los programas de geometría dinámica, probablemente el tipo de software más usado, facilitan la visualización de conceptos geométricos, algebraicos y funcionales, permiten modificarlos y relacionarlos para descubrir sus propiedades, etc., todo lo cual ayuda a comprender mejor y usar con eficacia esos contenidos matemáticos. En este caso se utilizó GeoGebra para que los estudiantes interactuaran de manera virtual y que la evidencia de sus producciones quedara grabada en el libro de GeoGebra que se utilizó. La clase fue grabada y analizada después

Participantes y contexto

Actualmente en el CETis 45 se imparten seis especialidades: Preparación de Alimentos y Bebidas, Servicios de Hospedaje, Administración de Recursos Humanos, Ofimática, Programación y Contabilidad. A su vez, los estudiantes pueden elegir entre los cuatros bachilleratos: Físico – Matemático, Químico – Biológico, Humanístico – Social y Económico – Administrativo.

Se atiende una población total de 22 grupos en ambos turnos, con una planta laboral de 68 trabajadores, entre docentes, personal administrativo y de apoyo a la educación. Pertenece a la UEMSTIS, el subsistema de Educación Media Superior más grande del país y de Latinoamérica, con una infraestructura física de 456 planteles a lo largo y ancho de todo el país.

Población muestra

Los alumnos que participarán en esta actividad pertenecen al Centro de Estudios Tecnológicos y de Servicios número 45 del municipio de Zihuatanejo de Azueta, Gro. del quinto semestre de la especialidad de contabilidad grupo "A". El grupo se compone de 10 estudiantes los cuales 5 son hombres y 5 son mujeres. Utilizaremos EH_n para referirnos a los hombres y como EM_n a las mujeres (Tabla 1).

Tabla 1.
Clave y edades de los participantes

CLAVE	Edad (años)
EM_1	17
EM_2	17
EM_3	18
EH_1	17
EM_4	19
EH_2	18
EH_3	17
EM_5	17
EH_4	17
EH_5	17

De acuerdo al Programa educativo del Bachillerato Tecnológico del 2017, ellos ya cursaron las Materias de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y actualmente Cálculo integral; por lo que ya deben conocer propiedades geométricas que les permitan realizar la actividad propuesta. Así mismo, conocen el programa de GeoGebra, debido a que ya han realizado actividades que involucran su uso en actividades que tienen que ver con el cálculo del área debajo de una curva.

La actividad se llevó a cabo el día lunes 29 de Noviembre de 2021 en un horario de 17:10 a 18:50 hrs. A la actividad solo asistieron 7 alumnos a saber: EM_1; EM_3; EM_4, EM_5, EH_1 , EH_2 y EH_4

El profesor encargado de esos alumnos no se presentó a la sesión debido a circunstancias personales, en su lugar estuvo la maestra Lea Mondragón García quien observó toda la actividad y realizó observaciones para mejorar el desempeño docente.

La actividad inició separando a los estudiantes por equipos conforme se fueron conectando a la video conferencia (Tabla 2).

Tabla 2

Conformación de los equipos de trabajo

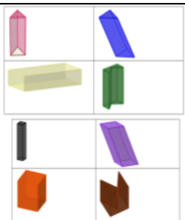
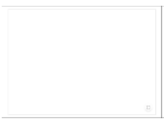
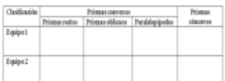
Equipo 1	Equipo 2
EH_2	EM_3
EM_4	EH_1
EH_4	EM_1
	EM_5

Después, se les indicó que dieran click al enlace https://www.geogebra.org/classroom/eqdwfmrm para que entraran al libro de GeoGebra que contenía las actividades.

Tareas (síntesis de las actividades)

Tabla 3.

Síntesis de tareas

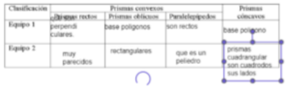
Momento		Tiempo	Descripción	Aprendizaje esperado
Información		20 minutos	Usando GeoGebra, se le pide al equipo 1, que observen 4 prismas cuidadosamente; de igual manera, se le pide al equipo 2, que observen otros 4 prismas.	Observar y manipular los prismas presentados para crear una imagen mental del prisma, que les permita realizar una descripción de los mismos, para proporcionárselas mutuamente entre el equipo 1 y el equipo 2.
Orientación dirigida		30 minutos	Una vez que los equipos observaron detenidamente los prismas, escribirán sus características a modo de descripción para que esa descripción sea intercambiada entre los equipos.	Se espera que los alumnos reconozcan los prismas presentados, sus características: caras bases, caras laterales, vértices, aristas.
Explicitación		30 minutos	Usando el mensaje tratarán de dibujar los prismas descritos usando GeoGebra.	Después de construir una imagen mental del prisma, ellos puedan representar esa imagen utilizando GeoGebra según sus características dadas.
Orientación libre	 Clasificación | Prismas convexos (Prismas rectos | Prismas oblicuos | Paralelepípedos) | Prismas cóncavos Equipo 1 | | | | Equipo 2 | | | |	20 minutos	Se les pide a los alumnos que clasifiquen los prismas utilizando una tabla.	Se espera que los alumnos logren clasificar los prismas según a la familia que pertenezcan utilizando su propio criterio, utilizando las características y dibujos realizados.

Resultados

Después de la puesta en escena, se expone la evidencia a continuación de las respuestas de los estudiantes al realizar la actividad. Los resultados arrojan que los alumnos, aunque están en el último año del nivel medio superior y han cursado la materia de Geometría y Trigonometría, no están en el nivel 3 de razonamiento de Van Hiele como se esperaba por su nivel educativo, se encuentran en los niveles 1(5) y 2(2). La implementación de esta actividad mostró áreas de oportunidad en su diseño por lo que al final de esta sección se muestra una versión que las atiende. En las tablas 1 a 7 se presentan los resultados en cada uno de los estudiantes en cada uno de las fases de aprendizaje que nos marca la teoría.

El nivel de razonamiento de EM_1 es el nivel 1 (Tabla 4) debido a que: identifica las figuras como un todo. En el discurso de EM_1 no distingue elementos de las figuras (aristas, caras, vértices), dedujimos que la identifica como un cuerpo geométrico rígido debido a que tiene movimiento dentro de un tipo de dimensión, entendiendo dimensión como (Movimiento de la figura en los ejes x, y, z). No diferencia ni partes ni componentes: EM_1 no muestra evidencia de identificar los componentes de una figura geométrica, además de no diferenciar entre prismas y pirámides, esto, se observa cuando se le solicita el dibujo a mano alzada de un prisma y reproduce una pirámide por tal motivo, no es capaz de producir una copia, de una figura particular o incluso conocerla; tampoco es capaz de conocer o explicar propiedades de la figura. Por ende, no precisa lenguaje básico geométrico para referirse a las figuras.

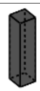
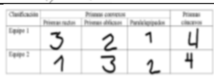
Tabla 4.
Evidencia de EM₁

	Nivel 1	*Nivel 2*	*Nivel 3*	*Nivel 4*	*Evidencia*
Información	X				
Orientación dirigida	X				que se muebe en sus dimensiones diferentes dimensiones.
Explicitación	X				
Orientación libre	X				

Clasificación	Prismas convexos			Prismas cóncavos
	Prismas rectos	Prismas oblicuos	Paralelepípedos	
Equipo 1	perpendi culares.	base poligonos	son rectos	base poligono
Equipo 2	muy parecidos	rectangulares	que es un peliedro	prismas cuadrangular son cuadrodos sus lados

El nivel de razonamiento de EM_3 es el nivel 2 (Tabla 5) debido a que: EM_3 identifica y analiza partes y propiedades particulares de la figura geométrica al describir el número de vértices y aristas, así mismo puede reproducir copias de las figuras mediante sus propiedades al establecer relaciones a través de la manipulación/experimentación, sin embargo, no es capaz de establecer relaciones o clasificaciones entre figuras de familias distintas debido a que no especificó si se trataba de un prisma recto, oblicuo, cóncavo o convexo; tampoco es capaz de elaborar definiciones, es decir, puede entender aquellas con una estructura sencilla.

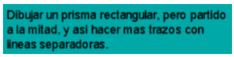
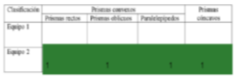
Tabla 5.
Evidencia de EM₃

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Evidencia
Información		X			
Orientación dirigida		X			Es un prisma con 8 vertices y 12 aristas Además es color gris
Explicitación		X			
Orientación libre		X			

Clasificación	Prismas convexos			Prismas cóncavos
	Prismas rectos	Prismas oblicuos	Paralelepípedos	
Equipo 1	3	2	1	4
Equipo 2	1	3	2	4

El nivel de razonamiento de EH_1 es el nivel 1 (Tabla 6) debido a que EH_1 identifica las figuras como un todo porque no logra identificar las características específicas de ese prisma (caras, vértices, aristas), tampoco diferencia ni partes ni componentes debido a que llama "trazos" a las artistas, tampoco es capaz de conocer o explicar propiedades de una figura debido a que no define el tipo de prisma que observa (si es recto u oblicuo) además, no precisa lenguaje básico geométrico para referirse a las figuras porque habla de "líneas" y "trazos".

Tabla 6.
Evidencia de EH_1

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Evidencia
Información	X				
Orientación dirigida	X				
Explicitación	X				
Orientación libre	X				

El nivel de razonamiento de EM_4 es el nivel 1 (Tabla 7) debido a que EM_4 identifica las figuras como un todo debido a que define a un prisma con "caras triangulares" y claramente no son triangulares, tampoco es capaz de conocer o explicar propiedades de la figura debido a que no menciona sus vértices, aristas, caras bases. Así mismo, no precisa lenguaje básico geométrico para referirse a la figura porque no precisó la figura de la base del prisma, creyendo que son 2 prismas unidos

Tabla 7.
Evidencia de EM_4

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Evidencia
Información	X				
Orientación dirigida	X				Es la unión de 2 prismas con caras triangulares, y sus caras laterales son de forma rectangular, y están unidad ambos prismas por una cara lateral rectángular
Explicitación	X				
Orientación libre		X			Clasificación: Prismas convexos (Prismas rectos / Prismas oblicuos / Paralelepipedos); Prismas cóncavos Equipo 1: Prisma triangular / Prisma cuadrangular / Prisma rectangular / Figuras irregulares Equipo 2: Cubo / Prismas triangulares / /

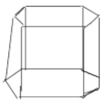
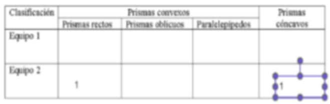
El nivel de razonamiento de EH_2 es el nivel 2 (Tabla 8) debido a que: EH_2 identifica y analiza partes y propiedades particulares de la figura geométrica describiendo su base, aristas y vértices, por lo tanto, establece relaciones a través de la manipulación/experimentación. Sin embargo, no es capaz de establecer relaciones o clasificaciones entre figuras de familias distintas debido a que no explica si es un prisma recto u oblicuo, ni cóncavo ni convexo. Tampoco es capaz de elaborar definiciones, puede entender aquellas con una estructura sencilla debido a que explica las caras del prisma con una suma "2+3"

Tabla 8.
Evidencia de EH_2

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nive 14	Evidencia	
Información		X				
Orientación dirigida		X			es un prima cuyas bases tienen 3 lados tambien tiene 9 aristas y 6 vertices poligonos que forman las caras 2+3	es un poliedro cuya superficie esta formada por dos cuadrilateros igual paralelos llamados bases y por cuatro caras laterales que son paralelogra
Explicitación		X				
Orientación libre	X				Clasificación: Prismas convexos (Prismas rectos / Prismas oblicuos / Paralelepipedos); Prismas cóncavos Equipo 1: 1 / 1 / / Equipo 2: / / /	

El nivel de razonamiento de EM_5 es el nivel 1 (Tabla 9) debido a que: EM_5 identifica las figuras como un todo al decir que la figura "parece…" tiene parecido a un objeto anteriormente conocido, es por ello que no diferencia ni partes ni componentes de la figura, así mismo no es capaz de conocer o explicar propiedades de una figura al no colocar otra descripción, tampoco precisa lenguaje básico geométrico para referirse a la figura.

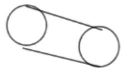
Tabla 9.
Evidencia de EM_5

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Evidencia
Información	X				
Orientación dirigida	X				"Parece Pacman"
Explicitación	X				
Orientación libre	X				

Clasificación	Prismas convexos			Prismas cóncavos
	Prismas rectos	Prismas oblicuos	Paralelepípedos	
Equipo 1				
Equipo 2	1			1

El nivel de razonamiento de EH_4 es el nivel 1 (Tabla 10) debido a que: EH_4 identifica las figuras como un todo debido a que no hace una precisión acerca del prisma que se trata, tampoco diferencia ni partes ni componentes debido a que no expresa la forma de su base y sus caras laterales, así mismo, no es capaz de conocer o explicar propiedades de una figura porque no menciona si se trata de un prisma recto u oblicuo; tampoco precisa lenguaje básico geométrico para referirse a las figuras al hacer mención que "sus caras son de dos figuras diferentes".

Tabla 10.
Evidencia de EH_4

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Evidencia
Información	X				
Orientación dirigida	X				tiene 5 caras , sus caras son de dos figuras diferentes, tiene 6 vertices
Explicitación	X				
Orientación libre	X				

Reflexiones

Implicaciones (para la enseñanza)

Cuando uno somete a los alumnos a ciertas pruebas que permitan conocer su razonamiento y sus conocimientos adquiridos, se resaltan las áreas de oportunidad que pueden verse beneficiadas con el modelo de Van Hiele si se llega a utilizar con eficacia, permite crear secuencias didácticas para la enseñanza de la geometría de manera interactiva, propiciando ambientes óptimos para el aprendizaje de propiedades, conceptos.

Implicaciones (para el aula)

El desarrollo de esta propuesta conlleva a un análisis del nivel de razonamiento de los estudiantes para darnos cuenta si los conocimientos adquiridos son suficientes para el alumno cuando deba reconocer las propiedades de un prisma este se muestre con un nivel de razonamiento que le permita identificar esas propiedades en cualquier actividad realizada. También es necesario contar con la tecnología necesaria y con cursos de inducción para facilitar el uso del software y sus interacciones.

Limitaciones

En esta nueva normalidad el aula de clases quedó relegada a una pantalla y a pocas interacciones a través de los periféricos de la computadora, en algunos casos apartó la esencia de la interacción de alumno-alumno y alumno-profesor. Sin embargo, debemos adaptarnos y mejorar para impartir clases de calidad y llevar el conocimiento de las aulas hasta los hogares de los estudiantes. El entorno virtual ofrece la libertad de interacción con softwares que permitan un aprendizaje dinámico que sea significativo para los estudiantes, promoviendo el desarrollo de la visualización en la interacción del alumno y los conceptos geométricos. Aunado a ello, existen áreas de oportunidad que se manifiestan en el entorno virtual, como lo son: interacciones físicas de alumnos, las interacciones físicas del profesor y los alumnos, preguntar personalmente al alumno las razones que lo llevaron a resolver las actividades de la manera en que lo hicieron y la justificación de sus respuestas.

Sobre la hipótesis

Según la hipótesis de investigación: se tenía pensado que los estudiantes estuvieran en el nivel 3 debido a su nivel académico y a las materias de geometría que han cursado, sin embargo los resultados muestran que se encuentran en el nivel 1 para la mayoría de ellos, esto nos da un panorama de oportunidad respecto a la necesidad de diseñar actividades que nos permitan como docentes implementar estrategias de enseñanza y aprendizaje que le permitan a los estudiantes (subir de nivel hasta llegar al que les corresponde)

Sobre futuras investigaciones

Después de conocer el nivel de razonamiento de los estudiantes, se replantean nuevas preguntas de investigación que pueden extenderse a un nuevo posgrado:

- ¿Cómo hacer y aplicar una propuesta didáctica que le permita a los alumnos aprender las propiedades geométricas necesarias para clasificar sólidos por sus características geométricas?
- ¿Puede ser la visualización una herramienta importante en la creación de conceptos geométricos en los alumnos?
- ¿Qué tan favorable es el uso de un software de geometría dinámica para la interacción virtual entre alumnos y conceptos geométricos?

Estas preguntas abren el panorama de continuar con la investigación para que el docente logra llevar a cabo una secuencia didáctica eficiente para sus alumnos para llevarlos de un nivel a otro.

Conclusiones

El objetivo principal de esta actividad fue conocer el nivel de razonamiento de los estudiantes de nivel medio superior, el cuál se logró cumplir. Sin embargo, Los alumnos tuvieron dificultades para “visualizar” los prismas para poder realizar una descripción correcta para sus compañeros, es motivo entonces de diseñar una actividad que les permita desarrollar la visualización y aumentar su nivel de razonamiento.

Es por ello que se propone rediseñar ciertas partes de la actividad:

-Colocar la actividad en 2 libros de GeoGebra para evitar que copien

-Promover un video tutorial del uso básico de GeoGebra para su mejor entendimiento

-Colocar a los estudiantes una manera de intercambio de respuestas más rápido y eficiente

-Que cada estudiante describa y dibuje todos los prismas del equipo

-Posiblemente que la actividad se desarrolle individual, debido a que dentro de un mismo equipo los integrantes tienen diferentes niveles de razonamiento

-Cambiar la tabla de clasificación por la clasificación que ellos propongan

Se propone conservar:

-El análisis de los niveles de razonamiento

-La descripción de los prismas

-El dibujo a mano alzada de los prismas

Se seguirá trabajando en este sentido, para aplicar nuevamente este estudio en nuevos alumnos después de atender a las mejoras de rediseño.

Referencias bibliográficas

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*. Paris, La Pensée Sauvage.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(1), 35-53.

Guillén, G. (2001), Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de magisterio, *Enseñanza de las Ciencias,*19(3), 415-431.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación matemática, 16* (3), 79-101.

Gutiérrez, A. (1990): *Investigaciones actuales sobre el aprendizaje de la geometría*, Cuadernos de Investigación, 14, 80-99.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (2021). Desafíos actuales para la didáctica de las matemáticas. *Innovaciones Educativas*, 23(34), 198-203.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1989): *Bibliografía sobre el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, Eíiseñanza de las Ciencias*, vol. 7,1, pp. 89-95.

Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the adquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics. *Special Issue Elements of Geometry in the Learning of Mathematics* 20(2-3), 27-46.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels [Un modelo para evaluar los niveles de Van Hiele]. En J. da Ponte & J. Matos (Eds.), *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME-18th)* 4148. Lisboa, Portugal.

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)* (tesis doctoral). Utrecht:Universidad de Utrecht. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Van Hiele, P. M. (1986) *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*, Academic press Inc

Construcción de propiedades geométricas del triángulo, vía la conjeturación[4]

José Antonio Ramírez Arroyo ~ José Efrén Marmolejo Vega

La investigación se centró en una propuesta de la construcción sistemática de las propiedades geométricas del triángulo y en el diseño de una secuencia didáctica para mostrar la efectividad de la sistematización de las propiedades del triángulo. Se utilizó la metodología propuesta por Marmolejo y Moreno (2019), que va de la intuición a la formalización y el debate científico, usando los porta segmentos y GeoGebra. Se realizó la secuencia de manera presencial en un grupo de 12 estudiantes, que conformaron 3 equipos. Se propició que los estudiantes lograran construir intuitivamente las propiedades del triángulo y, a través de la pluralidad de argumentos que generaron, producir conjeturas, y darle plausibilidad de forma heurística sin necesidad de llegar a la prueba lógica, dado que en el Nivel Medio Superior no se requiere demostrar rigurosamente.

Palabras clave: inducción, triángulo, geometría, argumentación, conjeturas.

Introducción

La idea principal de la investigación es presentar un orden alternativo de las propiedades geométricas del triángulo, esto es, presentarlas con

---

[4] Ramírez Arroyo, J.A. & Marmolejo Vega, J.E. (2022). Construcción de propiedades geométricas del triángulo, vía la conjeturación. En N. Marquina, M. Ferrari & M. Méndez, (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 3* (pp. 39-56). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México

cierta estructura, lo cual llevará a los estudiantes a comprender y construir cada una de ellas. Es decir, presentarlas al estudiante de manera distinta a la acostumbrada para su enseñanza en el Nivel Medio Superior (NMS).

En la actualidad las propuestas de enseñanza de la geometría y, en particular, lo relacionado a las propiedades geométricas del triángulo, siguen siendo las mismas en el Nivel Medio Superior. No se han alterado respecto a su orden ni su forma de enseñar en el aula escolar.

En mi práctica docente al enseñar las propiedades geométricas del triángulo, he observado que los estudiantes no comprenden la conexión entre una y otra propiedad, por lo cual su proceso de enseñanza se dificulta.

Derivado a esto nos lleva a discutir si el orden propuesto actualmente, en los programas de estudio de la asignatura de Geometría plana o euclidiana (UAGro, 2010b) en los diferentes Sistemas de Nivel Medio Superior, representa un factor que dificulte el aprendizaje de las propiedades geométricas del triángulo, por lo cual creemos que esta idea debe ser considerada.

La problemática en la comprensión en el aula escolar de las propiedades geométricas del triángulo, surge de una consciente revisión de investigaciones que tratan el tema, del análisis de planes y programas de estudios así como de la bibliografía que proponen, y de la obra Elementos de Euclides (1991). Para caracterizar el orden de presentación de las propiedades elementales del triángulo, concluimos que la organización de las propiedades se ajustan a la propuesta de la obra euclidiana que pudiera, debidamente dicho, no estar organizadas conforme las necesidades didácticas del aula.

En consecuencia, este proyecto se centra en realizar una construcción alternativa de la secuencia sistemática de propiedades geométricas del triángulo, a través de la conjeturación, con el propósito de crear un ordenamiento de propiedades pertinente para su enseñanza, que facilite el proceso de co-construcción de conocimiento por los estudiantes, gestionado por el maestro.

El siguiente paso es estructurar una secuencia didáctica, como una ejemplificación de la efectividad que se puede obtener con pertinencia en el aula de clase, mediante el proceso de conjeturación fundamentado en la unidad cognitiva argumentar- conjeturar- "demostrar", tratado de la intuición a la formalización, que enfatiza la necesidad de la plausibilidad del conocimiento matemático escolar (Marmolejo y Moreno, 2018).

Estos autores proponen un tratamiento metodológico de la intuición a la formalización, desde la perspectiva de la Teoría de la actividad que es de carácter formativo y que viene de las concepciones de Lev Semiónovich Vygotsky, que a la vez fue desarrollada Galperin (2000) y extendida por Talizina (2002).

Construcción alternativa de las propiedades del triángulo

La hipótesis de trabajo consiste en afirmar que el orden sistemático de propiedades geométricas heredado de la obra "Los elementos" escrita por Euclides en el siglo III antes de nuestra era, el cual ha sido reproducido con consecutivas adaptaciones hasta constituirse en contenido de programas educativos y libros de texto; no es necesariamente el orden de presentación de las propiedades geométricas del triángulo, a considerar en su enseñanza; aunque se han realizado diversos diseños didácticos como formas de facilitar la comprensión de dichas propiedades para los estudiantes.

Nuestra investigación nos orienta a analizar y decidir sobre si ¿podemos proponer un orden sistemático alternativo para el tratamiento de las propiedades geométricas del triángulo en el contexto escolar? Para ello, intentamos dilucidar y establecer los criterios que condujeron a Euclides a definir su sistema que actualmente es la base de los programas educativos y libros de texto de Nivel Medio Superior.

Con tal propósito, procuramos un acercamiento histórico a la obra de Euclides, la que se explica, en principionjhn, como una primera intención de recuperar la geometría ya existente, es decir la historia de la geometría, lo que se evidencia al incorporar producciones previas de los pitagóricos, Tales e Hipócrates según el relato de Proclo.

Del análisis de la obra los *Elementos* de Euclides(1991), se destaca que, en ella, se ordena y compendia el saber geométrico de esa época, le dota de estructura y con el rigor lógico concebido así en su momento, el cual caracteriza y distingue a las matemáticas. Euclides muestra que todo razonamiento riguroso o demostración debe tener una base sobre ciertos principios o conocimientos que se han establecido previamente, ya sea por demostración o por convención.

Por lo anteriormente expuesto, es posible afirmar que ***Los elementos*** son:

1. Un tratado de geometría pura
2. El ordenamiento de proposiciones observa el criterio lógico deductivo
3. De los primeros elementos (postulados), deduce las proposiciones bajo reglas lógicas.
4. Se usa para el ordenamiento la estrategia de marcha atrás.
5. Adolece de mostrar aplicaciones de los teoremas demostrados
6. Fue la base para que Hilbert la caracteriza con una visión contemporánea de la matemática.

7. Sigue siendo el texto por excelencia de la geometría sintética.

Se ha concebido como el patrón para la elaboración de textos escolares por más de 2000 años.

Propuesta alternativa de sistema de propiedades geométricas del triángulo

En esta investigación nos preguntamos: ¿Por qué la necesidad de un ordenamiento alternativo? Los Elementos de Euclides son “puros" porque no incluyen ninguna aplicación práctica, pese a que esta obra tiene un gran número de aplicaciones en física e ingeniería. Los Elementos fueron ordenados de manera lógica y no fueron hechos para enseñarse directamente en el aula escolar, por lo tanto, se necesita de una transposición didáctica y esta es una propuesta para ello.

A diferencia de la orientación lógico-deductiva, nos proponemos que las propiedades factibles de construir (descubrir por el estudiante), se validen plausiblemente, sin pérdida de cientificidad, auxiliándonos para ello de procedimientos heurísticos, como realizar construcciones con los portasegmentos, generar movilidad con recursos de geometría dinámica (GeoGebra), propiciando la exploración experimental y estimulando las argumentaciones. Se trata finalmente de una propuesta de presentación de la geometría del triángulo para el contexto escolar con alta carga intuitiva e inductiva en la formulación de argumentos.

Debido a nuestro propósito, algunas de las propiedades demostradas en el sistema euclidiano, aquí serán consideradas como definiciones, dada la familiarización que con ellas ya se tienen estables en el conocimiento de los estudiantes, como por ejemplo “en el triángulo isósceles, los ángulos opuestos a lados iguales son iguales” se sustituye por la definición de triángulo isósceles como el que tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales. Para el ordenamiento de proposiciones, definimos los siguientes criterios:

- Los primeros elementos serán proposiciones simples que serán la base para la obtención de las subsiguientes.
- La plausibilidad se constituye en el criterio de verdad, a partir de argumentaciones de naturaleza tanto intuitiva como formal.
- La secuencia de proposiciones se ordena de las más simples a las más complejas.
- Privilegiamos iniciar con el paralelismo, la semejanza y luego la congruencia (a diferencia del orden en *los Elementos*)
- Completamos las propiedades geométricas del triángulo con los centros y líneas notables.
- No consideramos los términos no definidos (punto, recta, plano, cuerpo) como no conocidos
- Asumimos como línea generadora de propiedades el paralelismo, a diferencia del orden euclidiano.
- Los procedimientos heurísticos de los que se hará mayor uso son las construcciones geométricas, la movilidad, la visualización, la reducción de un problema a otro ya conocido, entre otros; así mismo, los argumentos que se suscitan son de naturalezas tanto intuitiva-inductiva como deductiva plausible.
- Previo a la presentación del sistema de propiedades, se formula un prontuario de conceptos, definiciones y términos, que han sido recurrentemente usados en grados escolares anteriores al NMS.

De acuerdo con estos criterios, el ordenamiento propuesto es el siguiente:

1. Propiedades de perpendicularidad.
2. Propiedades de rectas paralelas.
3. Dos rectas cortadas por una recta transversal forman ángulos: alternos internos iguales; alternos externos iguales (A=B); correspondientes iguales; y opuestos por el vértice iguales.

4. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.
5. El ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él, y mayor que cualquiera de ellos.
6. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360 grados.
7. En todo triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado, y viceversa: a mayor lado se opone mayor ángulo; a lados iguales se oponen ángulos iguales.
8. Todo triángulo rectángulo posee uno y solo un ángulo recto, en tanto que los otros dos ángulos, son complementarios.
9. Si dos triángulos tienen iguales bases, e iguales alturas, ambos triángulos tienen igual área.
10. El segmento de recta que une los puntos medios de un triángulo tiene por longitud la mitad de la del tercer lado, y es paralelo a este. Sus lados se dividen en la razón ½ por el punto medio, y los triángulos así formados son semejantes (ángulos iguales y lados divididos en la misma razón)
11. Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos lados de éste en la misma razón. Los triángulos así formados son semejantes al tener ángulos iguales y lados proporcionales
12. Semejanza de triángulos: a) AAA, b) LAL , c) ALA
13. Los segmentos de rectas transversales al sistema de paralelas son proporcionales (Es la misma razón en que las paralelas dividen a las transversales).
14. Congruencia de triángulos: dos triángulos cualesquiera son congruentes si:

a) LLL b) ALA c) LAL

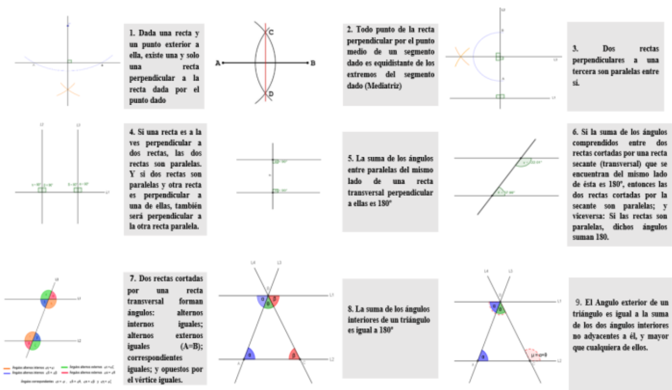
15. Puntos notables del triángulo.
16. Circunferencia inscrita en un triángulo.
17. Las mediatrices de todo triángulo son concurrentes en un punto, el circuncentro, el que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

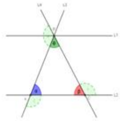
18. Circunferencia circunscrita en un triángulo.
19. La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, son equivalentes al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.
20. Teorema: La suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos, son equivalentes al área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa.
21. Teorema: La suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos, es equivalente al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.
22. Teorema de Pitágoras: Las áreas de figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo rectángulo, están en relación tal, que las áreas juntas de las figuras sobre los catetos son equivalentes a la de la figura construida sobre la hipotenusa.

A continuación, mostramos parte del ordenamiento propuesto para la construcción de las propiedades geométricas del triángulo.

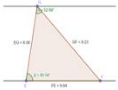
Figura 1:

Nuevo ordenamiento propuesto de las propiedades geométricas del triángulo



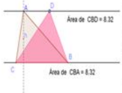


10. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360 grados.

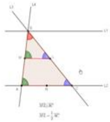


11. En todo triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado, y viceversa: a mayor lado se opone mayor ángulo; a lados iguales se oponen ángulos iguales.

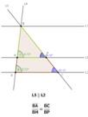
12. Todo triangulo rectángulo posee uno y solo un ángulo recto, en tanto que los otros dos ángulos, son complementarios



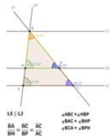
13. Si dos triángulos tienen iguales bases, e iguales alturas, ambos triángulos tienen igual área.



14. El segmento de recta que une los puntos medios de un triángulo tiene por longitud la mitad de la del tercer lado, y es paralelo a este. Sus lados se dividen en la razón ½ por el punto medio, y los triángulos así formados son semejantes (ángulos iguales y lados divididos en la misma razón)



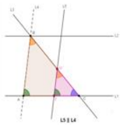
15. Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos lados de éste en la misma razón. Los triángulos así formados son semejantes al tener ángulos iguales y lados proporcionales



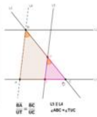
16. En general, dos o más triángulos son semejantes si tienen respectivamente ángulos iguales y lados proporcionales.

Abreviadamente:

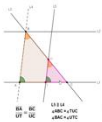
a) AAA, b) LAL
c) ALA



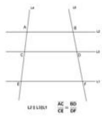
17. AAA En general, dos o más triángulos son semejantes si tienen respectivamente sus tres ángulos iguales



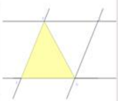
18. LAL En general, dos o más triángulos son semejantes si tienen respectivamente iguales un ángulo y proporcionales los lados adyacentes al ángulo



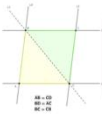
19. ALA En general, dos o más triángulos son semejantes si tienen respectivamente iguales dos ángulos y proporcionales los lados adyacentes al ángulo



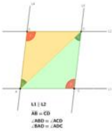
20. Los segmentos de rectas transversales al sistema de paralelas, son proporcionales (Es la misma razón en que las paralelas dividen a las transversales)



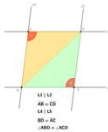
21. Los dos triángulos formados al dividir por la diagonal el paralelogramo son congruentes si: Sus tres lados y tres ángulos son respectivamente iguales. (la congruencia es un caso particular de la semejanza de razón la unidad). Abreviadamente, dos triángulos cualesquiera son congruentes si: LLL, b) ALA, c) LAL



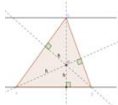
22. LLL Dos o más triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales sus tres lados



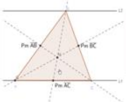
23. ALA Dos o más triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a ese lado



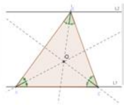
24. LAL Dos o más triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos



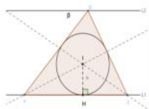
25. Las alturas de todo triángulo son concurrentes en un punto, el ortocentro



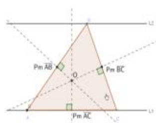
26. Las medianas de todo triángulo son concurrentes en un punto, el baricentro



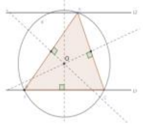
27. Las bisectrices de todo triángulo son concurrentes en un punto, el incentro, el que es centro de la circunferencia inscrita al triángulo.



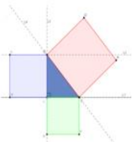
28. Circunferencia inscrita en un triangulo.
Se trazan las bisectrices de los ángulos interiores, el punto donde se cortan es el incentro I. Desde I se traza una perpendicular IH. Se dibuja la circunferencia con centro en I y que pase por H.

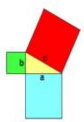


29. Las mediatrices de todo triángulo son concurrentes en un punto, el circuncentro, el que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

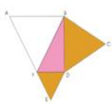


30. Circunferencia circunscrita en un triangulo.
Se trazan las mediatrices de los lados del triangulo(con dos es suficiente). El punto donde cortan es el circuncentro.

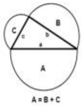




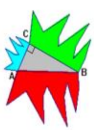
31. . Teorema de Pitágoras: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, son equivalentes al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.



32. . Teorema de Pitágoras: La suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos, son equivalentes al área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa.



33. Teorema de Pitágoras: La suma de las áreas de los semicirculos construidos sobre los catetos, es equivalente al área del semicirculo construido sobre la hipotenusa



34. Teorema de Pitágoras: Las áreas de figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo rectángulo, están en relación tal, que las áreas juntas de las figuras sobre los catetos son equivalentes a la de la figura construida sobre la hipotenusa

Marco teórico y metodológico

El marco teórico metodológico en específico para esta investigación se basa en el trabajo de Marmolejo y Moreno, (2019), donde muestran que la práctica de conjeturar por parte de los escolares contribuye a la construcción de conocimientos a partir del campo semántico de los estudiantes, el cual es producto de su condición socio cultural e histórica.

Es importante lo que desarrollan Marmolejo y Solano (2005), ya que plantean la hipótesis de que la conjetura es el objetivo de la argumentación preformal o inductiva, e inicio del proceso de la conjetura a la prueba, es pues el punto de inflexión que explica la unidad cognitiva Argumentar-Conjeturar-Demostrar. La confianza en una conjetura disminuye cuando un fundamento posible para ella es refutado y aumenta cuando una conjetura incompatible es refutada.

Marmolejo y Moreno (2019) definen dos tipos de argumentaciones:

- *Argumentación inductiva:* fundada en hechos, verificaciones y predicciones utilizando como recursos los procedimientos heurísticos durante el proceso de estructuración de conjeturas por la vía intuitiva-inductiva.
- *Argumentación deductiva*: resulta del encadenamiento lógico de proposiciones conforme a las reglas de la lógica proposicional.

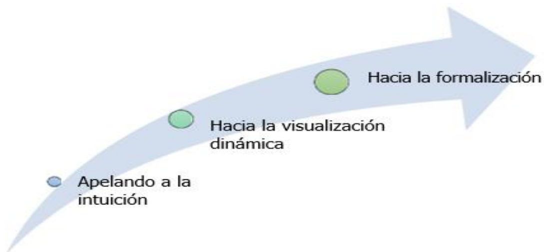
Los objetivos de la argumentación inductiva, de la cual damos mayor énfasis en esta investigación, es la construcción de conjeturas, mediando en ello, la deliberación del acuerdo, la transmisión de una convicción y la justificación.

De la Intuición a la formalización

Este enfoque, propuesto por Marmolejo y Moreno (2018) y que se deriva de la teoría de la actividad de los autores antes citados, propone que a través del uso de la intuición se puede llegar vía la conjeturación a la formulación de propiedades que se verifican plausiblemente y heurísticamente. Lo que proponen es fomentar en el alumno la generación de argumentaciones las cuales pueden ser falsas o verdaderas. Lo importante es que el alumno logre un proceso cognitivo y, por medio de esto, llegue a generar conjeturas que le ayudarán a hacer plausible el conocimiento matemático que está adquiriendo. Aunque en este proceso no se llegara a la demostración, se considera que para su nivel educativo es suficiente para comprender conceptos, definiciones y relaciones matemáticas que constituyen las propiedades en estudio.

Marmolejo y Moreno (2018) proponen tres momentos didácticos para el tratamiento de conceptos y/o propiedades matemáticas, como se muestran a continuación en la Figura 2:

Figura 2:
Intuición-Visualización-formalización



Fuente: (Marmolejo & Moreno, 2018)

Dentro de este proceso utilizamos el debate científico como una estrategia didáctica. Analizaremos los enunciados propuestos por los estudiantes en las actividades de la secuencia, los cuales serán la mayor parte de tipo intuitivo-inductivo, aunque existirán algunos de tipo deductivos.

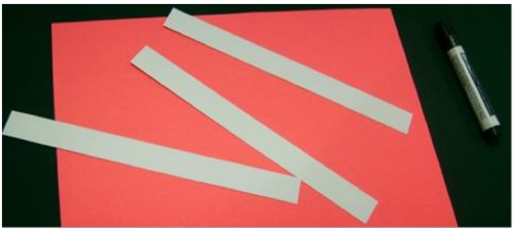
Diseño de la secuencia didáctica

La metodología que se ha desarrollado para esta investigación hace uso de dos importantes recursos de enseñanza: que es el uso de la herramienta de los portasegmentos, aunado al del software de geometría dinámica GeoGebra. Como primer paso se inicia con el proceso de intuición a través del uso los portasegmentos al realizar construcciones geométricas, posteriormente a través del software dinámico se procede a la visualización para la generalización. En ambos momentos se generan resultados argumentativos y como último paso se realiza la formalización de las argumentaciones.

Los portasegmentos son una herramienta utilizada en la geometría poco conocida. Son reglas comúnmente miden de 1.5 cm de ancho por 15 cm de largo, aunque pueden variar proporcionalmente, como ser de 2 cm de ancho por 20 de largo. Comúnmente son de papel, cartón, madera u otros materiales, ya que son reglas de bandas paralelas. Estás herramientas permiten utilizar las propiedades de rectas paralelas y realizar trazos.

Figura 3.

Portasegmentos



Fuente: https://multimedia.uned.ac.cr/pem/geometria_euclidea/lab2 portasegmentos /img/25portaseg.png

Se diseñó una secuencia de propiedades por medio de la cual el estudiante, de forma intuitiva-inductiva, las construya y comprenda mediante argumentaciones progresivas de la intuición hacia la conjetura plausible, facilitando el paso a la demostración por vías lógicas Se espera que propicie que el estudiante logre establecer conjeturas, qué le darán plausibilidad de forma heurística y que no necesariamente necesita llegar a una prueba lógica, dado que en el nivel medio superior no se requiere rigurosamente.

Se diseñó la secuencia didáctica tomando sólo una parte del ordenamiento de la secuencia propuesta de las propiedades geométricas del triángulo, con la cual se elaboraron 19 actividades. Se llevó a cabo en la Preparatoria Popular Extensión Tuncingo No. 135, incorporada a la Universidad Autónoma de Guerrero y que utiliza el Plan de Estudios 2010 que esta basado en competencias (UAGro, 2010a).

La comunidad de Tuncingo, se encuentra en una zona considerada como rural, la mayoría de los estudiantes no tienen la facilidad de estudiar una carrera después de estudiar su preparatoria. Esta escuela cuenta con 3 aulas de material de madera y lamina de acero, no cuenta con equipo de cómputo, ni medios digitales, pero tiene conexión a internet pagada por los padres de familia, a una velocidad máxima de 8 Mb.

Se aplicó la secuencia propuesta a un grupo de estudiantes de segundo grado de forma presencial, pertenecientes al cuarto semestre, los cuales cursaban la asignatura de Geometría y Trigonometría. El grupo contó con 12 estudiantes y se procedió a realizar 3 equipos de 4 integrantes cada uno. A cada estudiante se les entregaron hojas de trabajo con las instrucciones de la secuencia a aplicar.

Se les dio acceso a un taller virtual para que el estudiante recordara y contara con los conocimientos básicos de geometría, entre los contenidos, contenían los conceptos básicos del prontuario de conocimientos base necesarios, así como el uso de los portasegmentos y el uso de GeoGebra, elementos necesarios para aplicar la secuencia didáctica. Dicho taller se realizó en la plataforma Classroom de Google y su contenido fue el siguiente:

Contenido:

1. La presentación del taller.
2. Normas digitales.
3. Los conceptos básicos de geometría.
4. Ángulos y triángulos y rectas notables.
5. Razones y proporciones
6. Los portasegmentos
7. Introducción a GeoGebra.
8. Proyecto integrador final.

Al término del taller virtual, se comenzó la secuencia didáctica propuesta, se les solicitó a cada estudiante el siguiente material para trabajar:

- Diez hojas de papel bond blanco tamaño carta o libreta.
- 6 portasegmentos.
- Un lápiz.
- Un sacapuntas.
- Un borrador.
- Una mesa de trabajo plana para realizar los trazos.
- Transportador.
- Dispositivo celular, tablet o laptop.

Presentamos de ejemplo dos de las 19 actividades propuesta del ordenamiento propuesto de la construcción de las propiedades geométricas del triángulo:

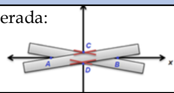
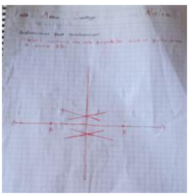
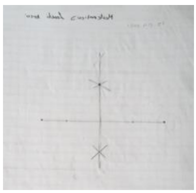
<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 3. (10 min)
Objetivo: que el estudiante comprenda que: por el punto medio de un segmento dado construya una recta perpendicular (mediatriz)
Herramienta heurística: Portasegmentos.
Trabajo heurístico: El estudiante mediante trazos geométricos y utilizando los portasegmentos, logre llegar a la propiedad conjeturada de: Todo punto de la recta perpendicular por el punto medio de un segmento dado es equidistante de los extremos del segmento dado (Mediatriz).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento 1: corresponde a la formación del aspecto material verbal-empírico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nota: Dado que el estudiante ya vio la construcción de una mediatriz en el aseguramiento de partida, pero no se le dio la definición de mediatriz, le será fácil construir la recta perpendicular.
Construcción esperada:

</td></tr>
<tr><td>Preguntas:</td><td>Resultado esperado</td></tr>
<tr><td>¿Cómo aseguras que la recta que construiste es la mediatriz solicitada?
¿Los ángulos formados son rectos?
¿Por qué aseguras que los ángulos formados son rectos?
¿Cuál es tu argumento?
¿La distancia de AC a CB son iguales? ¿si es así, porque lo aseguras?
¿La mediatriz será única o existirá otra?
Si movemos el punto C más arriba, ¿Cómo será la distancia de AC con respecto a CB? ¿Por qué lo aseguras?
Si tomamos el punto D, La distancia de AD a DB como son?
Si movemos el punto D sobre cualquier dirección de la recta, ¿Cómo será la distancia de AD con respecto a DB? ¿Por qué lo aseguras?
¿Pasará lo mismo en cualquier posición que coloque el punto sobre la recta generada?</td><td>Se espera que el estudiante argumente de forma intuitivo-inductivo mediante las preguntas hechas y se acerque a la conjetura.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">En este momento, el estudiante institucionalizara la definición: Todo punto de la recta perpendicular por el punto medio de un segmento dado es equidistante de los extremos del segmento dado (Mediatriz), así como sus características, esto mediante las argumentaciones intuitivas-inductivas que los llevaron en consenso con sus compañeros a crear una conjetura sólida que le dará la plausibilidad del conocimiento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedad conjeturada: Todo punto de la recta perpendicular por el punto medio de un segmento dado es equidistante de los extremos del segmento dado (Mediatriz).</td></tr>
</table>

Figura 4.

Ejemplos de actividad 3 entregadas por los estudiantes





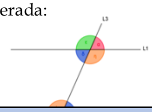
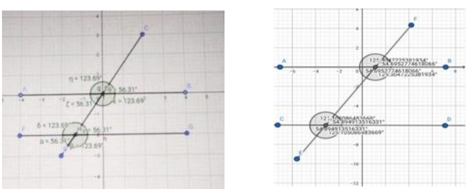
<table>
<tr><td colspan="3">Actividad 8. (10 min)
Objetivo: que el estudiante comprenda que: Dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal forman ángulos: alternos internos iguales; alternos externos iguales (A=B); correspondientes iguales; y opuestos por el vértice iguales.
Herramienta heurística: GeoGebra, usando la movilidad y visualización.
Trabajo heurístico: El estudiante utilizando el resultado de la actividad anterior, utilizará la construcción de la actividad 7 realizada en GeoGebra, para observar la relación de los ángulos formados y su igualdad.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Momento 1: corresponde a la formación del aspecto material verbal-empírico</td></tr>
<tr><td>1. Tomando como base la construcción anterior realizada en GeoGebra, realizaremos lo siguiente:
2. Medir todos los ángulos comprendidos entre las dos rectas y formado por la secante.</td><td colspan="2">Construcción esperada:
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas:</td><td>Resultado esperado</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo son los ángulos η y δ? ¿Cuánto suman ambos ángulos? ¿Por qué lo aseguras?
¿Cómo son los ángulos η y α? ¿Cuánto suman ambos ángulos? ¿Por qué lo aseguras?
• Si η y δ suman 180º y η y α suman 180º, ¿Cómo son los ángulos α y δ? ¿Por qué lo aseguras?
¿Cuánto suman η y β? ¿Por qué lo aseguras?
• Si η y β suman 180º y η y δ también suman 180º ¿Cómo son los ángulos δ y β? ¿Cuál es tu argumento?
¿Cómo son los ángulos η y l? ¿Cómo lo aseguras?
¿Cómo son los ángulos ε y ζ? ¿Cómo lo aseguras?
¿Cómo son los ángulos α y θ? ¿Cómo lo aseguras?
¿Puedes enumerar las igualdades entre ángulos? ¿Justifica y dibújalo??
Asignaremos nombres a los pares de ángulos iguales.</td><td>Se espera que el estudiante argumente de forma intuitiva-inductiva mediante las preguntas hechas y se acerque a la conjetura.
Los estudiantes mediante la argumentación llegarán a observar la relación que existe entre los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una recta transversal:
• Alternos internos.
• Alternos externos.
• Correspondientes.
• Opuestos por el vértice.</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">En este momento, el estudiante institucionalizara la definición: Si la suma de los ángulos comprendidos entre dos rectas cortadas por una recta secante (transversal) que se encuentran del mismo lado de ésta es 180°, entonces las dos rectas cortadas por la secante son paralelas; y viceversa: Si las rectas son paralelas, dichos ángulos suman 180. Esto mediante las argumentaciones intuitivas-inductivas que los llevaron en consenso con sus compañeros a crear una conjetura sólida que le dará la plausibilidad del conocimiento.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propiedad conjeturada: Dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal forman ángulos: alternos internos iguales; alternos externos iguales (A=B); correspondientes iguales; y opuestos por el vértice iguales.</td></tr>
</table>

Figura 5.

Ejemplos de actividad 8 entregadas por los estudiantes.



Recolección de datos y análisis

Debido a que la Preparatoria no cuenta con centro de cómputo, se procedió a llevar el siguiente material para aplicar de manera óptima la secuencia y así poder recolectar audios y videos de la aplicación de la secuencia.

Materiales y equipos:

- Portasegmentos.
- 3 celulares para grabación de actividades.
- 2 laptop
- 1 Tablet
- 1 Bocina portátil
- 3 micrófonos de solapa de 6 metros de largo semi profesionales.
- 3 Tripies para celular.
- 1 modem 4G.

Con el taller virtual de elementos básicos de Geometría implementado en Classroom, se logró el propósito de que el estudiante recordara los conocimientos previos necesarios, además de conocer de cerca los portasegmentos y cómo se construyen y se utilizan, así como también conocer GeoGebra y sus herramientas básicas.

Conclusiones preliminares

Observamos que los estudiantes tuvieron dificultades al comprender por sí solos mediante el taller virtual en Classroom de forma asíncrona como fue diseñado, dado que la comunidad por ser rural, la mayoría de los jóvenes son de escasos recurso y no cuentan con la facilidad de tener datos en su celular, esto es recargar saldo. Por consecuencia, se procedió a realizar dos sesiones presenciales de 100 minutos cada una, para trabajar el uso de los portasegmentos y GeoGebra. Realizadas las dos sesiones obtuvieron las herramientas necesarias para poder realizar las siguientes construcciones de las propiedades geométricas del ordenamiento que proponemos en esta investigación.

Cabe mencionar que, en cada una de las actividades, propuestas en el taller de elementos básicos de Geometría, fueron esenciales para comenzar las construcciones propuestas de la secuencia didáctica, entre ellas el aprender a usar los portasegmentos, el uso de GeoGebra, así como también el tema de razones y proporciones, ya que se necesita para los temas de semejanza de triángulos.

Referencias bibliográficas

Euclides (1991) *Elementos Tomo I* [Trad. María Luisa Puertas], Biblioteca clásica Gredos. (Obra original publicada en 300 A.c.).

Galperin, P. (2000). *Cuatro conferencias sobre psicología*. Moscú, Rusia: Escuela Superior.

Marmolejo, E. & Moreno, G. (2019) Demostración en Contexto Escolar. En E. Marmolejo y G. Moreno (Coord.) *La Demostración Matemática en contexto escolar* (pp. 43-63). Chilpancingo, México: UAGro.

Marmolejo, E. & Moreno, G., (2018). De la intuición a la formalización, el caso de las cónicas. En A. Contreras (Ed.) *Acercamientos a la ciencia* (pp. 153-179). Chilpancingo de Los Bravos, Gro., México: UAGro.

Marmolejo E. & Solano M. (2005). Convencio□n Dida□ctica sobre la Demostracio□n Geome□trica. En J. Lezama, M. Sa□nchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matema□tica Educativa 18*, 139-145, Me□xico: Comite□ Latinoamericano de Matema□tica Educativa.

Talízina, N. (2002). La teoría de la formación de las acciones mentales de P. Y. Galperin. *Conferencia dictada en el seminario internacional de psicología, Actualidad, aplicaciones y perspectivas de la teoría histórico-cultural*; Puebla, México. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062016000100008

UAGro (2010a) *Plan de Estudios por Competencias de Educación Media Superior*. México: UAGro

UAGro (2010b) *Programa de Estudios. Matemáticas III*. México: UAGro

Reflexiones sobre lenguaje algebraico, modelación escolar y covariación

Identidades algebraicas y factorización desde una perspectiva geométrica[5]

Lea Mondragón García - Marcela Ferrari Escolá – Edgardo Locia Espinoza

Sustentamos esta investigación con la Teoría de Situaciones Didácticas, donde estudiaremos identidades algebraicas de segundo grado y la factorización. Integramos en las actividades el uso de material manipulable y GeoGebra. La experimentación piloto se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de tercer semestre de educación media superior. El desarrollo de las actividades se trabajan en modalidad virtual utilizando las plataformas de Google Classroom, GeoGebra y ZOOM. Buscamos que el diseño de las actividades propicie que los estudiantes interactúen con figuras geométricas manipulables para explorar identidades algebraicas, con el fin de que comuniquen, en sesiones síncronas, sus propuestas de resolución. Al momento de presentar este reporte nos encontramos en el análisis de los datos del piloto realizado en el primer ciclo de la Ingeniería didáctica que desarrollamos.

Palabras clave: Factorización, Identidades, Álgebra, Situación.

Introducción

Desde mi práctica docente he percibido que existe cierta recurrencia en los errores que cometen los estudiantes de bachillerato cuando trabajan con algunos contenidos algebraicos, tal el caso de un binomio elevado al cuadrado. Con frecuencia presentan resultados erróneos

---

[5] Mondragón García, L., Ferrari Escolá, M. & Locia Espinoza, E. (2022). Identidades algebraicas y factorización desde una perspectiva geométrica. En N. Marquina, M. Ferrari & M. Méndez, (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 3* (pp. 61-80). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México

tales como $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ o $(a + b)^2 = a^2 + ab$, donde observo que hacen mal uso de las reglas para calcular los productos básicos como la suma de dos términos elevado al cuadrado, la diferencia al cuadrado de dos términos, o el producto de una suma y diferencia de dos términos, incluso algunos estudiantes, no toman en cuenta el signo, ya que no le dan un significado matema□tico. En la literatura hemos encontrado que, muchos de esos errores que comenten mis estudiantes han sido reportados como "errores comunes" (Callou y Pereira 2021) y de acuerdo con las investigaciones revisadas (Socas, 2007; Graciano y Aké, 2017; 2019), muchos de los errores se deben a la falta de comprensión y de significados que construyen los estudiantes mientras trabajan con dichos contenidos algebraicos.

El álgebra es un área considerada de difícil entendimiento para los estudiantes, ya que se forman una concepción equivocada de los procesos y la incidencia en errores repetidamente, por lo cual dificulta el aprendizaje del álgebra en los estudiantes, (Graciano y Aké, 2017; 2019: 2021). En este trabajo, particularmente nos cuestionamos sobre: ¿Cómo favorece la implementación de una secuencia, fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas, para la enseñanza-aprendizaje de productos notables y el proceso de factorización, desde una perspectiva geométrica?, ya que consideramos importante que los estudiantes comprendan y signifiquen los procesos mediante las actividades que el profesor plantee.

Tenemos como interés principal diseñar una estrategia didáctica para la ensen□anza de la factorización de expresiones algebraicas de binomios y trinomios, desde la relación entre álgebra y geometría, apoyándonos de la construcción de rectángulos y desafiando a los estudiantes a lograr una expresión algebraica, trabajando con el cálculo de sus áreas.

Teoría de Situaciones

Sustentamos nuestra investigación en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) ya que plantea una postura constructivista-piagetiana, permitiendo y contribuyendo a la construcción del conocimiento en situaciones de aula. Godino, et al (2020), consideran que la hipótesis básica de la TSD es el conocimiento construido en la interacción alumno-saber-profesor, donde el profesor debe tener la capacidad de incitar a los estudiantes a aceptar el desafío de aprender matemáticas, con una selección adecuada de actividades. El interés principal de esta teoría es determinar cómo los individuos construyen y comunican los saberes matemáticos en la resolución de problemas.

Brousseau (2007), plantea que, una situación es aquella interacción entre un sujeto y el medio, a fin de alcanzar el saber enseñado. Considera que: "Una *situación didáctica* es un conjunto de relaciones explícitas o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de estudiantes, algún entorno y el profesor con el fin de permitir a los alumnos aprender algún conocimiento" (Godino, et al , 2020, p.149).

Entonces, consideraremos como situación didáctica a toda la actividad desarrollada por parte de los estudiantes y del profesor en combinación con el saber. En este sentido, es importante provocar en el estudiante responsabilidad de involucrarse y buscar una solución al problema que se le plantee al desarrollar las actividades diseñadas por el profesor.

Brousseau propone identificar, en una situación didáctica, aquellas situaciones donde el estudiante interactúa con el medio construyendo conocimiento matemático sin la intervención explícita del profesor (Godino, et al, 2020, p.150). Es decir, proponer las *situaciones adidácticas*, donde el estudiante se enfrenta a una situación-problema aplicando los conocimientos con los que cuenta, quizás cambiando e incluso adquiriendo nuevos conocimientos, mediante los resultados de la interacción que realiza en la búsqueda de solución al problema (Godino, et al, 2020). En este sentido, es necesario reflexionar sobre el *medio* didáctico que provoque la interacción entre los estudiantes y las tareas específicas, donde el papel del profesor es relevante en su diseño cuidando que el estudiante construya sus conocimientos al realizar las actividades planteadas, manipulando o transformando el medio.

La Teoría de Situaciones didácticas, propone situaciones para la construcción del conocimiento matemático a fin de observar cómo aprende el alumno, cuál es su comportamiento y su evolución al adquirir el conocimiento, clasificándose como situaciones adidácticas, base para estructurar nuestro diseño, a:

Situación de Acción

"En las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado", (Cantoral, et al, 2005, p.43). Esta situación es disparadora de la devolución al estudiante de la necesidad de aprender, de resolver un problema. Consideramos que una actividad donde el estudiante manipule cuadriláteros recortados en papel para armar una figura de mayor área los involucra en trabajar con fórmulas de áreas conocidas, organizar información y discutir sobre cómo articular las "partes" conocidas y el "todo" a descubrir.

Situación de Formulación

El objetivo principal es la comunicación y la información que cada estudiante aporte. "Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que se deben comunicar", (Cantoral, et al, 2005, p.43). El estudiante debe interesarse en la búsqueda de una solución, haciendo uso de un lenguaje entendible para comunicar a sus compañeros, con responsabilidad, sus propias conclusiones presentándoles una propuesta de solución, haciendo uso de sus conocimientos. En esta fase, consideramos importante organizar a los estudiantes en grupos de trabajo, donde compartan sus ideas propiciándose, la observación de diferencias y similitudes en los resultados propuestos.

Situación de Validación

Se trata de que el estudiante pueda convencer a sus compañeros de la validez de las afirmaciones que hace; en esta situación, cada uno de los estudiantes deben probar y demostrar sus afirmaciones a sus compañeros, no siendo suficiente con la comprobación de un ejemplo para afirmar como verdadera su conjetura; siendo necesario argumentar el por qué de su propuesta. En esta fase, el estudiante corrobora o prueba lo que ha propuesto para la resolución de la actividad planteada, con el fin de verificar si la propuesta en la situación anterior es verídica, realizando comparaciones con el trabajo de sus compañeros, para crear una sola propuesta de resolución.

Situación de Institucionalización

En esta situación se ve claramente la intervención del docente, con las estrategias que pueda utilizar, haciendo responsable al estudiante sobre su propuesta de resolución, considerando las aportaciones de cada estudiante y valorando el trabajo realizado en los tres procesos anteriores, para acercarlos a un lenguaje matemático más formal y a la mejor estrategia de resolución.

El docente no debe dar al estudiante el resultado al que debe llegar, sino que lo debe dejar experimentar con las actividades que deben estar organizadas para que el estudiante pueda transitar entre la acción, formulación y validación, (Cantoral et al. 2005).

En cada una de las situaciones existe implícitamente una situación adidáctica, en la que el estudiante se responsabiliza del desarrollo de la actividad, considerando esta labor como parte esencial para la construcción y adquisición de un conocimiento nuevo.

Metodología

Se considera la Ingeniería didáctica como la metodología indicada para esta investigación. Según Calderón y León (2005), se puede implementar en la enseñanza ya que se considera como característica fundamental la comparación del análisis *a priori* de acuerdo a lo planeado en las actividades y el análisis *a posteriori* con los datos obtenidos de las actividades realizadas por los estudiantes, obteniendo así un proceso que permite al estudiante construir su propio conocimiento. Esta metodología consta de cuatro fases: análisis preliminar, análisis *a priori*, puesta en escena y análisis *a posteriori* (Artigue, 1995), fases que permiten validar el diseño.

Análisis preliminar

Este análisis está siendo desarrollado desde los reportes de investigación que nos permiten conocer la problemática abordada atendiendo las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica involucradas, mismas que se fortalecerán con el análisis *a posteriori* del primer ciclo de nuestra investigación, elementos que presentamos en este artículo.

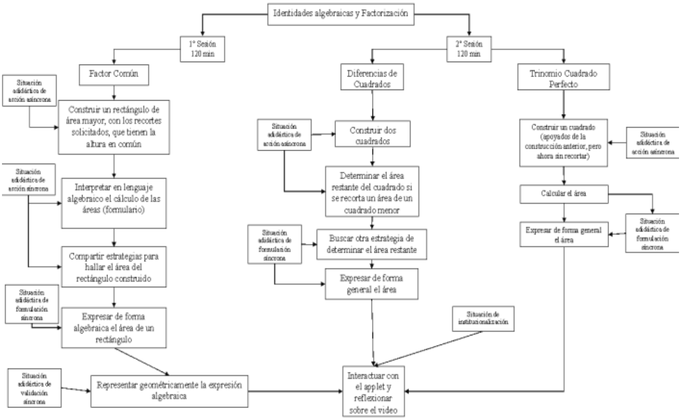
Análisis a priori

En esta fase se diseña la secuencia didáctica de actividades, la dosificación de los tiempos, el rol que tendrá el docente frente al grupo de estudiantes, así como realizar una hipótesis sobre la producción de los estudiantes; basándonos en el análisis preliminar. El análisis *a priori,* se convierte en un análisis de control de significados y "comprende una parte *descriptiva* y una *predictiva*, centradas en las características de la situación disen□ada y que se pretende presentar en la clase a los estudiantes" (Artigue, 1995, p. 45).

Se ha diseñado una secuencia de actividades en las que se plantean el desarrollo del proceso de factorización considerando tres casos: Factor común, Diferencia de Cuadrados y Trinomio Cuadrado Perfecto, tal como se muestra en el Esquema 1.

Esquema 1.

Secuencia de actividades para Factorización



.Diseño de actividades para el caso de factor común

El conocimiento matemático que nos interesa estudiar es identidades algebraicas y factorización, trabajando desde una perspectiva geométrica. En la Tabla 1 presentamos una síntesis de las actividades matemáticas diseñadas así como elementos predictivos y descriptivos que evidencian nuestras ideas.

Por las condiciones de emergencia sanitaria se consideró diseñar las actividades para un ambiente virtual. Se planearon dos sesiones en la plataforma de ZOOM, con un tiempo de 120 minutos. Nos apoyamos en la plataforma de Google Classroom, en donde proporcionar el material de trabajo y solicitar cuadriláteros recortados con medidas específicas y diferentes colores, actividad asíncrona previa a la sesión inicial.

Tabla 1:

Síntesis de diseño

Sitación didáctica de	Actividad	Intención	Argumento esperado
Acción	Construir el rectángulo de mayor área con los recortes dados	• Identificar los lados del rectángulo mayor (sin medir) • Calcular su área aritméticamente	• Hacer uso de la fórmula o sumar las áreas independientes • Identificar que la medida en común de las figuras es la altura
	Representar de forma general el área	Transitar del trabajo aritmético al lenguaje algebraico	Sumar áreas de las partes o multiplicar lados.
Formulación	Dibujar un cuadrilátero dada una expresión algebraica	Transitar del lenguaje algebraico al geométrico	Proponer que puede ser un cuadrado o un rectángulo de tal forma que represente el área
Validación	Analizar lo que varía y lo que es común en applets y vídeo.	• Abstraer lo común en las figuras y la expresión general del área formada • Conocer el factor común	Se puede determinar de sumando independiente y aplicando la fórmula conocida
Institucionalización			

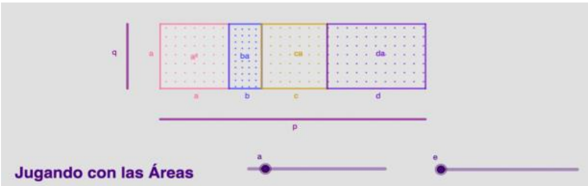
La intención de la primera actividad asíncrona es que el estudiante calcule las áreas de cuadriláteros, en específico de rectángulos y cuadrados, de forma independiente, aplicando los conocimientos adquiridos en la escuela. Se le solicita la construcción de un rectángulo con el material recortado, desafiando a usar sus conocimientos de geometría y aritmética para dar respuesta a las cuestiones: ¿Cuáles son los lados del rectángulo que construiste?, ¿Cómo podemos saber si es el rectángulo más grande? Se espera que el estudiante conteste sin utilizar algún instrumento de medida, sino sólo los datos de las figuras recortadas y que se interese en buscar la solución de la actividad, propiciando una situación de acción.

La primera sesión síncrona invita a los estudiantes a contestar un cuestionario (formulario de Google) de conocimientos previos pensando en utilizar no más de 15 minutos en esta actividad y cuya intención es que recuerden las fórmulas para el cálculo del área del rectángulo y del cuadrado, reducción de términos semejantes y operaciones básicas entre binomios. Luego, se propone generar dos grupos de trabajo en salas de Zoom, otorgando unos 20 minutos para que los estudiantes compartan la solución de la tarea asíncrona, observen las similitudes y las diferencias de sus trabajos en comparación con los de sus compañeros y discutan sobre la estrategia utilizada (sumar las áreas de los recortes o abstraer altura común por suma de lados pequeños de los recortes) emergiendo una situación de formulación. Después se los pasará a la sala general de zoom para compartir las conclusiones de cada grupo y explicar la forma en la que realizaron la actividad con el resto del grupo. El lenguaje predominante es el aritmético, esperando que asome un lenguaje algebraico y se fortalezca al desafiarlos con la tarea de representar geométricamente la expresión algebraica $17x$ abonando la situación de validación.

A manera de cierre de la primera sesión, se invitará a los estudiantes a interactuar con un applet de GeoGebra diseñado reproduciendo, de manera dinámica, las actividades que han trabajado con material concreto Se espera que mediante la observación de lo que sucede al variar el tamaño del rectángulo mayor manipulando los deslizadores, pudieran abstraer lo común y lo que varía en cada caso. (Figura 1); haciendo una analogía de lo que se haya realizado en las situaciones anteriores, y logren expresar el área de la construcción geométrica de forma algebraica. En los minutos restantes de la sesión, se les proyectará un video, en donde se muestra la realización de la construcción geométrica de la actividad, concluyendo en una expresión algebraica, provocando a los estudiantes a la reflexión, haciéndoles saber la forma matemática adecuada del tema de factorización, en particular, el caso de factor común. Antes de concluir se incitará al estudiante a plantear una solución en el cálculo del área de un cuadrado apoyándose de dos figuras (un cuadrado grande y un pequeño), en donde al cuadrado mayor se le recorta el área del cuadrado menor, esto último para trabajarlo de forma independiente y asíncrona para reflexionar en la siguiente sesión.

Figura 1.

Captura de pantalla del applet a utilizar



De forma análoga se trabajarán los otros dos métodos, los que no son presentados en este artículo.

Fase de experimentación

En esta fase se desarrolla la situación didáctica diseñada recolectando los datos que emergen de las actividades, que en nuestro estudio piloto se realizó de manera virtual.

El experimento se llevó a cabo con estudiantes de la Educación Media Superior, de la Universidad Autónoma de Guerrero, de la Unidad Académica Preparatoria Popular Incorporada Colotlipa, ubicada en la localidad de Colotlipa, municipio de Quechultenango, del Estado de Guerrero. Los estudiantes se encontraban cursando el segundo grado, en el tercer semestre, en el turno vespertino, cuyas edades oscilan entre 16 y 19 años.

Algunos de los estudiantes viven en esa misma localidad, una de las alumnas vive en una comunidad aledaña, Juxtlahuaca y otra en la comunidad de Xoyapezco. El grupo se conformó por ocho estudiantes, siete niñas y un niño. Es importante mencionar que la mayoría de los estudiantes de esta institución no cuentan con una computadora y en su mayoría se conectan a través del celular por medio de datos móviles.

Las actividades se llevaron a cabo en un ambiente virtual distribuyendose de forma asíncrona utilizando la plataforma Google Classroom y síncrona con el uso de Zoom. Algunas de las actividades se desarrollaron de manera individual para luego compartir al colectivo de compañeros la forma en que se resolvieron las actividades.

Para la recolección de los datos ocupamos las siguientes herramientas:

- *Formulario de Google*; donde se registraron las respuestas de los estudiantes con el fin de conocer sus conocimientos sobre el cálculo de las áreas del rectángulo y el cuadrado, iniciando con la representación algebraica generalizada.
- *Plataforma de Google Classroom* donde se recogieron las fotografías de los trabajos realizados por los estudiantes con el material requerido en la realización de las actividades asíncronas como síncronas.
- *Plataforma Classroom de GeoGebra* donde se registraron algunas de las actividades realizadas por los estudiantes ya que no todos lograron entregar por el difícil acceso al internet.
- *Videoconferencias* realizadas en la plataforma de ZOOM con el fin de utilizar las salas para dividir en dos grupos de trabajo, para llevar a cabo la comunicación, sesiones que fueron videograbadas.

Para el análisis de los datos se transcribieron las videograbaciones identificando a los participantes con la letra "En",donde n = 1,… 8 y se utilizó la misma nomenclatura para las producciones escritas de cada uno.

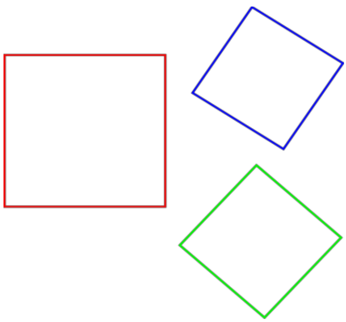
Análisis *a posteriori*

En esta fase se analizan los datos recogidos en la fase de experimentación siguiendo los principios de la teoría de situaciones didácticas; para luego contrastarlo con el análisis *a priori* para validar el diseño propuesto. En esta ocasión, presentamos un primer análisis del caso de factor común.

En el Formulario de Google, los estudiantes contestaron de acuerdo a sus conocimientos sobre el cálculo de las áreas del rectángulo y el cuadrado. Ante la pregunta ¿Cómo determinas el área de las figuras?, (Figura 2) la mayoría contestó: "L x L" (E3) o "Por la fórmula sería L×L" (E1), respuesta que nos informan sobre el uso adecuado de las fórmulas, teniendo como intención que el estudiante exprese de forma general la representación del área de los cuadriláteros, retomando esto último en las actividades posteriores.

Figura 2.

Figura mostrada en el formulario de Google



Luego de responder el formulario, organizando a los estudiantes en dos equipos cada uno en una sala de Zoom, se invitó a compartir sus respuestas de la actividad asíncrona, evidenciando que utilizaron sus conocimientos previos confirmando que emergió una situación de acción al manipular el material propuesto sin requerir la construcción de nuevos conocimientos (Extracto 1).

Extracto 1: Construcción y determinación del área del rectángulo.

E1: *¿En la pregunta número 3, cómo obtuvieron su rectángulo más grande?*

E3*: Pues acomodé las figuras así de un sólo lado y ya de un lado fueron 23. 5 y del otro sólo 10.5, y ya fue todo.*

Profesor*: ¿De un sólo lado?, ¿puedes mostrarnos con tu cámara cómo lo hiciste?,* (Figura 3).

E3: *Si, maestra.*

Profesor: *¿es la única forma de representar esa área?, ¿qué contestaron?, ¿si o no? y ¿por qué?*

E6: *yo le puse que si, porque son la medidas que tengo y aunque lo cambie siguen siendo lo mismo*

Profesor: E4, *muéstrame en tu pantalla ¿cómo hiciste tu figura?*

E4: *Si se puede poner varias o… tres*

Figura 3.

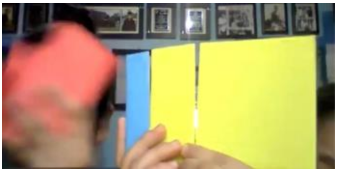
Construcción por el E1, del rectángulo solicitado

En el extracto anterior se muestra el trabajo realizado por los estudiantes, observando que lograron identificar que era la única forma de construcción del rectángulo, debido a las medidas específicas, resaltando que la altura es común en todas las figuras (Figura 3 y 4). Esta conjetura a la que llegaron era la esperada, ya que esta era la intencionalidad de las medidas otorgadas.

Posteriormente, se les cuestionó: ¿De cuántas formas (reacomodando las figuras) puedes representar el área?, ¿Por qué?, con la intención de que confirmaran y verificaran (si no lo habían hecho) su propuesta (Extracto 2).

Figura 4.

Construcción por el E4, del rectángulo solicitado



Extracto 2: Confirma que es la única forma de acomodar los recortes.

Profesor: *E4, nos muestras la figuras ordenadas de otra forma, ¿por qué dices que si se puede)*

E4: *mmmm, no solamente se puede así* [refiriéndose a la Figura 4], *sino que también, así*,[Figura 5].

Figura 5.

Construcción por el E4, de una forma diferente

E4 intenta mostrar que existen formas diferentes de construir el rectángulo pero sólo gira la orientación de la figura evidenciando que la posición del rectángulo es parte de su definición, es decir, no abstrae la independencia de la forma de todo cuadrilátero respecto a la posición. Sin embargo, luego de la discusión con sus compañeros, identifica que se trata de la misma figura.

En la siguiente actividad, los estudiantes debían observar las similitudes y las diferencias entre su trabajo y el trabajo de sus compañeros, además de contestar a la pregunta: ¿Cómo se puede generalizar una expresión de la representación de las áreas? Se busca provocar a los estudiantes a una situación de formulación, al invitarlos a compartir con sus compañeros sus propuestas de resolución (Extracto 3)

Extracto 3: Respuesta a la generalización del área del rectángulo construido.

E1: *… nosotros quedamos de acuerdo que era de dos maneras de encontrar el área de un rectángulo, que era una forma particular y otra general, y que pues para calcular el área del rectángulo construido, lo podíamos hacer con su fórmula del rectángulo que es área que es igual a base por altura.*

En el extracto 3 evidenciamos que los estudiantes tienen la idea de la expresión algebraica como una generalización a partir de situaciones particulares. Sin embargo, no lograron expresar de forma escrita, sólo mencionaban que se lograba haciendo uso de la fórmula conocida para el cálculo del área del rectángulo y del cuadrado, evidenciando que se mantienen en una situación de acción no llegando a percibirse elementos propios de una situación de formulación. Sin embargo, minutos después se logra observar que los estudiantes ya lograron relacionar lo geométrico con lo algebraico y viceversa (Extracto 4), demandando consensuar diferentes argumentos.

Extracto 4: De lo algebraico a lo geométrico.

Profesor: *Para la actividad 3: dada la expresión de 17x, ahora ¿podemos representarla de una forma geométrica?, ¿cómo lo proponen?*

E3: *yo creo que no, porque para ser una figura tendrías que tener más expresiones*

E1: *pues yo decía que sí, porque si está dada en una expresión general y la podemos poner en una particular, ya solamente si conocemos las medidas de cada uno, en vez de poner una forma general, la podemos poner en una forma particular*

Profesor: *¿cómo proponen esa forma geométrica?*

E4: *¿podría ser un cuadrado?*

Profesor: *un cuadrado, a ver, como sería el cuadrado, donde su área sea 17x. ¿tu coincides, E1 en que sea un cuadrado?¿Cómo podemos expresar una forma algebraica y representar de forma geométrica?, E4 dice que puede ser un cuadrado, E3 ¿tú sigues pensando en que no?*

E3*: creo que sería un rectángulo, ya, este, dividir el área entre los cuatro lados*

Profesor*: ok, E4 dice que puede ser un cuadrado, E3 dice que puede ser un rectángulo y E1, ¿qué dices E1?*

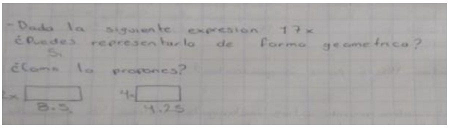
E1: *pues que es un rectángulo,* [contesta sonriendo]

Profesor: *a ver, pensemos que puede ser un rectángulo, ¿cómo debe ser ese rectángulo para que su área sea 17x?*

E2: *Yo tengo una propuesta, ¡pero no sé, si estoy bien!*, (Figura 6)

Figura 6.

Representación geométrica de la expresión algebraica propuesta del E2

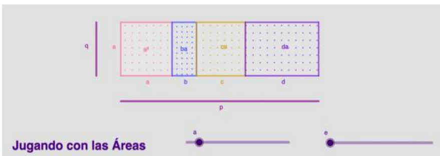


En esta actividad se logra discutir diferentes maneras de representar geométricamente un monomio, elementos que consideramos importante para significar a los productos notables como articulación entre área y expresión algebraica.

Continuando en las actividades, se les proporcionó a los estudiantes el primer applet con medidas específicas y una construcción análoga a lo que habían realizado con el material recortado, después se les proporcionó el segundo applet con medidas generales (Figura 6).

Figura 7.

Applet de la plataforma de GeoGebra con medidas generales



Extracto 5: Expresión verbal del área del rectángulo

Profesor: *¿Cómo puedo encontrar el área de este rectángulo, que no sea sumando sus áreas, como dijo E4?*, [refiriéndose al rectángulo del applet de la Figura 7]

E3: *multiplicando "n" por "p"*, [unos minutos después]

Profesor: *Entonces "q" mide "a", y ¿cuánto mide "p"?*

E2: *yo maestra, este, ahora quiero participar*

Profesor: *¡claro!*

E2: *pues "p" es igual a "a por b"* [lo comenta de forma equivocada y corrige inmediatamente], *digo: a "a más b más c y más d", ¿no?*

E3*: si*

En esta parte del extracto 5 se observa que el estudiante identifica los lados del rectángulo con una expresión algebraica y determina cómo expresar el área del rectángulo, lo cual era lo esperado en esta actividad, mencionada verbalmente. Cerramos la primera sesión con la proyección del video provocando a los estudiantes a la reflexión en el trabajo realizado en las situaciones anteriores, explicitando un lenguaje matemático adecuado, así como el contenido abordado de la factorización en específico factor común generando una situación de institucionalización.

Conclusiones

La experiencia vivida con los estudiantes en el piloto reportado en este artículo, al implementar una secuencia de actividades para la enseñanza de la factorización de expresiones algebraicas de binomios y trinomios apoyándonos en la articulación entre álgebra y geometría, nos permitió percibir las fragilidades y fortalezas de las actividades propuestas.

A pesar de las dificultades de conexión de los estudiantes, demostraron interés y motivación al conectarse los días asignados para las sesiones síncronas y entregar las evidencias en las plataformas mencionadas. Los estudiantes recordaron conocimientos y los aplicaron en el desarrollo de las actividades evidenciando que el diseño no fue desafiante para provocar la necesidad de construir nuevo conocimiento matemático, pero sí una actividad enriquecedora para interactuar con los estudiantes y fortalecer sus conocimientos.

Percibimos, luego de nuestro primera análisis a posteriori de la primera sesión del experimento, que es necesario atender, entre otros, los siguientes puntos:

- Lograr una mejor articulación y demanda cognitiva en las actividades.
- Mejorar la dosificación de tiempos, ya que en cada una de las situaciones, no fue suficiente.
- En la hoja de trabajo reestructurar las preguntas a fin de que las respuestas no sean ambiguas.
- Incorporar otra actividad para trabajar en la situación de validación, con el fin de que realmente se verifique lo planteado en las situaciones anteriores.
- Así como presentar los applets de GeoGebra en la situación de validación, además de dar tiempo a una interacción individual, en vez de considerarlos en la situación de institucionalización.

Consideramos que en la siguiente propuesta, propiciar que los estudiantes interactúen con los applets de forma independiente y en equipo, y así al final compartan sus observaciones, realizando las actividades solicitadas en la plataforma de GeoGebra; además que se sugiere considerar esta actividad como parte de la situación de validación y no de institucionalización. Es importante entender que la situación didáctica debe ser un recurso de implementación para lograr que los estudiantes alcancen el saber deseado así como reconocer el rol del profesor ya que se enfrenta a una tarea difícil. Por otro lado, diseñar actividades que devuelvan a los estudiantes la necesidad de aprender donde se propicie el conocer y reconocer la importancia de los procesos, las reglas así como cada elemento involucrado y la implementación adecuada en los ejercicios que se le presenten.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. BsAs Argentina: Libros de Zorzal.

Calderón, D. I., León, C. O. L. (2005). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. Investigar en didáctica como un imperativo para el profesor. Universidad del Valle.

Callou, T. G. C. & Pereira, L. B. D. (2021). Error Analysis in the Resolutions of 1st Year High School Students un the Study of Notable Products and Polynomial Factoring. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science, 8* (6), 101-111. DOI: 10.22161/ijaers.86.11

Cantoral, R., Farfán, R. Cordero, F. Alanís, J.A., Rodríguez, R. A., Garza, A. (2005). Teoría de Situaciones didácticas. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza (Eds). *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 41-52). Trillas. ISBN: 968-24-7203-2.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigacio□n en Educacio□n Matema□tica XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Burgos, M. & Wilhelmi, M. R. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Ensen□anza de las Ciencias, 38*(1), 147-164. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.

Graciano J. & Aké L. P. (2017). Conocimiento comu□n y especializado de productos notables de los futuros profesores de matemáticas. En L. A. Serna (Ed.), *Acta latinoamericana de matema□tica educativa* (pp.1320-1329). Me□xico: Comité Latinoamericano de Matemética Educativa. Recuperado de http:// funes.uniandes.edu.co/12359/1/Graciano2017Conocimiento.

Graciano J. & Aké L. P. (2019). Conocimiento matemático para la ensen□anza de productos notables: un estudio de tres casos. *Revista Electrónica Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 4(2,Nu□mero especial), 192-201. Recuparedo en http://funes.uniandes.edu.co/15893/1/-Graciano2019Conocimiento.

Graciano J. & Aké L. P. (2021). Conocimiento de profesores de matemáticas en formación sobre los productos notables. *Uniciencias 35(1), 99-107.* DOI:http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.6.

Socas, M. M., (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, M. Bolea, (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Modelación escolar para la resignificación de la función lineal en bachillerato[6]

Ada Cecilia Blanco Ruiz - María Esther Magali Méndez Guevara

La justificación básica del estudio es la experiencia docente, donde se identifica la falta de actividades del contexto del estudiante para la función lineal (FL), que provoque el uso de su conocimiento matemático. Consideramos la categoría de modelación escolar para diseñar una actividad matemática que ofrece alternativas para que el estudiante obtenga un conocimiento articulado sobre FL, mediante el desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos. El objetivo general fue analizar los usos del conocimiento matemático en torno a la FL que emergen al desarrollar una situación de modelación escolar con jóvenes de Bachillerato General. Se realizó un experimento de enseñanza con 19 estudiantes de cuarto semestre del Bachillerato General en un ambiente virtual. Se concluye en esta investigación que los estudiantes resignifican la FL por medio de los usos del conocimiento matemático (tablas, gráficas, expresiones) en la situación de modelación escolar planteada, y que estos usos están vinculados por prácticas asociadas al proceso de modelación matemática.

Palabras clave: función lineal, modelación escolar, experimento de enseñanza, ambiente virtual.

[6] Blanco Ruiz, A. C. & Méndez Guevara, MEM. (2022). Modelación escolar para la resignificación de la función lineal en bachillerato. En N. Marquina, M. Ferrari & M. Méndez, (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 3* (pp. 81-100). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México

Introducción

Investigaciones reportadas en Matemática Educativa enfatizan que los profesores deben incorporar actividades en el aula que hagan que los estudiantes usen su conocimiento matemático, las cuales le permitan ver la funcionalidad de las matemáticas (Villa-Ochoa, 2007; Pezoa & Morales, 2016; Del Valle, 2010; Suárez & Cordero, 2008, 2010; y, Méndez, 2013).

También que la escuela prioriza la realización mecánica de procedimientos y algoritmos, por encima de la comprensión de conceptos, es decir los estudiantes saben realizar operaciones, pero no comprenden muy bien cómo usarlas. Además, las actividades están lejos de su realidad cotidiana (Campeón, Aldana & Villa, 2018; García, 2013).

Desde mi experiencia como docente de nivel medio superior he identificado que esto sucede en el tratamiento de la función lineal (FL). Entonces, hace falta incorporar actividades en el aula en donde se tome en cuenta situaciones del contexto de los estudiantes y en esos escenarios se valore las matemáticas, promoviendo el desarrollo del uso del conocimiento matemático.

Aunado a lo anterior, el plan de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior propone “enfatizar el valor de uso del conocimiento matemático por parte del estudiante: esto significa, colocar a las prácticas sobre el objeto formal” (SEP, 2017, p. 66).

Así el interés de este trabajo es sobre el tema de FL, abordado en la asignatura de Matemáticas IV, y sobre cómo desarrollar este con estudiantes del Bachillerato General. Esta investigación toma el reto de generar una actividad matemática, que se adecue a las expectativas del modelo educativo, en tanto se promueva la valoración del uso del conocimiento matemático. Para esto se ha realizado un análisis, sin ser exhaustivo, de los resultados reportados sobre la FL en las investigaciones de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa (2007) afirma que la modelación es una estrategia que posibilita el significar un concepto matemático y potencia el desarrollo de capacidades en el estudiante.

Mientras que Pezoa y Morales (2016) reconocen que en el proceso de modelación se resignifican conocimientos en términos de generar conocimiento y no sólo en la adquisición de objetos o definiciones o la aplicación de éstos.

Por su parte Del Valle (2010), considera a la modelación como una práctica que articula el pensamiento matemático, no sólo como una asignación entre objetos, sino que promueve el uso de la visualización matemática como una estrategia para la formación adecuada de los conceptos.

Aunado a ello, los trabajos desarrollados por Suárez y Cordero (2008, 2010) dan muestra de que en una situación de modelación del movimiento (SMM), se promueve la vinculación de la modelación y la graficación, a través de relacionar los significados, los procedimientos y los argumentos, además declaran que una SMM propicia una resignificación de la variación.

Es decir, las investigaciones reportan que la modelación puede favorecer la construcción de significados y argumentos matemáticos, por ejemplo, para la FL. Se motiva a evitar que el estudiante aprenda los conceptos enmarcados en procesos algorítmicos y memorísticos y que se fortalezca el uso del conocimiento a través de una situación de modelación. Esto permitirá abordar cuestiones como aspectos variacionales, mediante el uso de las gráficas, tablas de datos o de las relaciones algebraicas.

En esta investigación se considera una categoría socioepistemológica de modelación, modelación escolar (Méndez, 2013), para sustentar un diseño de situación de aprendizaje que provocó el desarrollo de redes de usos de conocimiento matemático, entre ellos, usos de; gráficas, tablas y expresiones de variación como herramientas de predicción, entorno que ofreció un escenario para resignificar a la FL en un ambiente virtual.

Como metodología se realizó un experimento de enseñanza, para la preparación del experimento se delimitó los elementos que dan soporte teórico a la situación de modelación y se proponen las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA), mientras que en la experimentación se implementó el diseño en un ambiente virtual y se recabo la información mediante grabaciones y notas de trabajo, para posteriormente hacer el análisis retrospectivo de los datos.

La pregunta que guió la investigación es ¿cómo en una situación de modelación escolar resignifica el uso de la FL por estudiantes de Bachillerato General?

El objetivo general fue mostrar los usos del conocimiento matemático en torno a la FL que emergen al desarrollar con jóvenes de Bachillerato General una situación de modelación escolar.

Marco teórico

En esta sección se muestran los aspectos teóricos que respaldan la investigación. El estudio "asume al saber cómo construcción social del conocimiento entendiendo esto como procesos deliberados de usos compartidos de conocimiento en este sentido el saber no se limita a definir objetos matemáticos, sino de mecanismos fundamentales de constitución" (Cantoral, 2013, p. 57).

Este estudio comparte la acepción de resignificación de Córdoba (2011) el cual la considera como un proceso que no es sinónimo de dar nuevos significados o nuevas definiciones a un concepto, sino una construcción del conocimiento mismo que hacen los individuos de manera colectiva y que está normado por aspectos institucionales y culturales en un contexto particular.

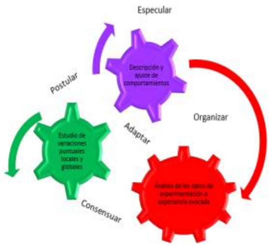
La postura socioepistemológica sobre modelación asegura que es una construcción de conocimiento matemático en sí misma, compartiendo el punto de vista de Cordero (2006), Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez y Cordero (2014), y Tocto y Méndez (2015), su característica radica en la producción de argumentaciones y usos de conocimiento de corte matemático que los participantes ponen en juego durante el desarrollo de situaciones de aprendizaje que se vinculan entre sí. Además, esta postura no prioriza la aplicación de un contenido matemático que se movilice por el proceso de matematización, y no se pretende llevar a la modelación matemática tal cual, a la comunidad educativa estudiantil, sino más bien generar un marco apropiado a la matemática escolar basado en la esencia de la modelación como construcción continua de conocimiento (Méndez y Cordero, 2014; Tocto y Méndez, 2015).

La categoría de modelación escolar (CME) (Méndez, 2013) pretende rediseñar el discurso matemático escolar, para incluir a los actores en su construcción de conocimiento matemático, y aminorar la tensión entre la matemática escolar y la matemática funcional, en tanto sea útil a quien la construye y posibilite su desarrollo en otros escenarios.

Esta CME provee de elementos para desarrollar una matemática orgánica al estudiante,que permite el desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos (uso de las tablas de datos, gráficas y expresiones analíticas) que se develan como herramientas de variación local, puntual y global que al articularse caracterizan comportamientos o tendencias de variación (Méndez y Cordero, 2014). En la CME se conjugan prácticas del proceso de modelación que propician el uso del conocimiento matemático, dando luz a modelos de variación. El diseño basado en esta CME se estructura en momentos que provocan el análisis de las condiciones situacionales y la variación conjunta de las variables. La figura 1 exhibe algunas de las prácticas que se vivencian en la modelación escolar.

Figura 1.

Elementos de la categoría de modelación escolar



Nota: tomado de (Méndez, 2013, p. 61)

Metodología

Se realizó un experimento de enseñanza. De acuerdo con Steffe y Thompson (2000, citado en Molina et al. 2011), "los experimentos de enseñanza consisten en una secuencia de episodios de enseñanza, donde los participantes son un investigador-docente, uno o más estudiantes y uno o más investigadores-observadores" (p. 79). Estos se desarrollan en tres fases, en la primera se establecen los objetivos de la investigación, se diseña la secuencia de intervención y se delinean trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA), en la segunda se lleva a cabo la intervención y se recolectan los datos sobre los cuales se inicia un planteamiento de conjeturas sobre los resultados y finalmente en la tercera fase se analiza toda la información recabada y se realiza un análisis en retrospectiva del conjunto de datos.

En esta investigación se plantearon trayectorias hipotéticas de aprendizaje que se sustentan de prácticas de modelación (PM) y de usos de conocimiento matemático que darán cuenta de la resignificación de la FL por estudiantes de bachillerato general, en la sección de tareas se darán más detalles.

Participantes y contexto

La experimentación se llevó a cabo en un ambiente virtual. Se compartieron dos videos, un archivo word por medio de la plataforma Google Classroom, se empleó zoom para las clases sincrónicas y se usó el telegram para compartir las producciones durante la sesión sincrónica.

Los participantes fueron 19 estudiantes de cuarto semestre que cursaron la asignatura de matemáticas IV correspondiente al plan de estudio de la Dirección General de Bachillerato (SEP, 2018). La experimentación se desarrolló en siete sesiones sincrónicas de aproximadamente 40 minutos a través de videollamada Zoom (se videograbaron) y Telegram (Chat y envío de fotografías de lo realizado durante la sesión).

La sección 1, se inicia con el análisis de la situación que se proyecta en video[7], y las preguntas descritas en la tabla 1. Posteriormente, en la sección 2 se proyecta un segundo video[8] en donde se visualizan datos numéricos y se realizan las preguntas correspondientes. Las primeras dos secciones promueven la identificación de variables y la relación de variabilidad entre ellas. Finalmente, en la sección 3, se empleó la información que los estudiantes compartieron por telegram para promover la discusión sobre los saberes matemáticos puestos en juego.

Durante las sesiones los estudiantes trabajaron de manera individual, y se daba un espacio para reflexionar sobre las preguntas del diseño promoviendo la participación. Las participaciones se previeron a criterio del profesor, en este caso primer autor, para motivar tanto a los estudiantes que participan mucho como los que participan poco. De esta manera poder tener una variedad de usos de conocimientos que se explicarán de viva voz.

[7] Video disponible en: https://drive.google.com/file/d/10ems8fLRmKa2H1ugBg_2ISj64SZYKWEt/view?usp=sharing

[8] Video disponible en: https://drive.google.com/file/d/10yfR_dpnMcyWc9RdY-PlMylaYZhrJQxS/view?usp=sharing

Tareas

La situación de modelación escolar se dividieron en tres secciones, a grosso modo en la tabla 1 se muestran las THA por cada sección. Se exhiben las prácticas de modelación y los usos que se consideró para la resignificación de la FL.

Tabla 1:

THA de la situación de modelación escolar (fuente propia)

<table>
<tr><th>Situación de aprendizaje</th><th colspan="2">Trayectoria Hipotética de Aprendizaje</th></tr>
<tr><th colspan="3">Sección 1</th></tr>
<tr><th>Indicaciones</th><th>Intención</th><th>Argumentos esperados</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Observa el primer vídeo en el que se muestra una serie de cisternas para almacenar agua. y se plantea lo siguiente:
a) Describe ¿qué sucede con las cisternas que se muestran en el video?</td><td>Observe e identifique las variables que influyen en la cantidad de litros de agua en las diferentes cisternas.</td><td>Comunicará lo que observa en las cisternas que se muestran en el video. “la base se mantiene constante” “aumentando la altura, el volumen y entonces la cantidad de litros de agua”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas guía: ¿Qué elementos observas que van cambiando en la construcción de cisternas? ¿Qué observas en la cisterna 1 con respecto a la cisterna 2?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prácticas de modelación: Observar, identificar, toma de decisiones y organizar.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">b) De lo que observaste, ¿qué elementos influyen en la cantidad de litros de agua que podrías almacenar o contener en las cisternas?</td><td>Convenga que las variables que permiten comunicar la cantidad de litros de agua en las cisternas son: área de la base, altura y volumen.</td><td>Identificará que los elementos que influyen, está la forma del, recipiente en este caso prisma cuadrangular la altura, área de la base y volumen de las cisternas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas guía: ¿Qué es lo que observaron?¿Qué forma tienen las cisternas?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prácticas de modelación: Observar, identificar, describir, postular</td></tr>
<tr><td rowspan="3">c) ¿Cómo relacionarías los elementos que influyen en la cantidad de agua que podrían almacenar?</td><td>Describa el comportamiento de las variables convenidas, relacionen número de cisterna-altura o área de la base-altura.</td><td>Vinculará la variación de la altura con el volumen que va tomando la cisterna; Postule una relación de variación entre las variables.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas guía: ¿Cómo describen la cantidad de litros de agua en las cisternas de acuerdo con los elementos?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prácticas de modelación: Observar, postular, describir, identificar, analizar, vincular.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">d) ¿Qué elementos cambian y cuáles no cambian en las cisternas?</td><td>Identifique los elementos, variables, que cambian y cuales se mantienen constantes.</td><td>Describirá de acuerdo con lo observado que la altura, el volumen y la cantidad de litros de agua varían, y que la base se mantiene constante.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas guía: ¿Qué sucede con la altura de las cisternas?¿Qué sucede con la base de las cisternas?¿Qué sucede con el volumen de las cisternas?¿Qué sucede con la cantidad de litros de agua en las cisternas?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prácticas de modelación: Identificar, examinar, observar.</td></tr>
</table>

Sección 2		
Indicaciones	**Intención**	**Argumentos esperados**
Observa el video 2 y responde las siguientes preguntas. a) ¿Qué variables se pueden considerar para obtener la cantidad de litros de agua que contienen las cisternas?	Tomar decisión sobre qué variables se estudiarán.	Identificará que las variables son la altura, la base y el volumen. y elegirá cuáles convienen relacionar de manera que permitan describir la situación de la construcción de cisternas.
	Prácticas de modelación: Toma de decisiones, observar, interpretar.	
b) ¿Cómo y cuánto varían las variables para conocer la cantidad de litros de agua que contienen las cisternas?	Identifique que la variación de la altura es constante y que en cada cisterna varía la cantidad de litros de agua.	Realizará una comparación entre los datos que tienen, e identificará que: entre cada cisterna la altura varía 0.5 m. Esto provoca que la cantidad de agua que puede contener la cisterna varie
	Preguntas guía: ¿Cuál es la diferencia entre la altura de cisterna en cisterna? ¿Cómo se relaciona la variación de la altura con la cantidad de litros de agua de las cisternas?	
	Prácticas de modelación: Calcular, comparar, interpretar, observar	
c) ¿De qué depende la cantidad de litros de agua en las cisternas?	Identifique el elemento principal que influye en la cantidad de litros de agua en las cisternas, es decir la altura.	Reflexionará sobre cada uno de los elementos que intervienen en la cantidad de litros de agua en las cisternas y determinen que la cantidad de litros de agua depende del volumen que a su vez depende de la altura.
	Prácticas de modelación: Toma de decisiones, observar e interpretar	
d) ¿Qué cantidad de litros de agua tendrán las cisternas 4, 5, 6 y 7?	Comparen mediante cálculos de la variación de la altura, volu-men y cantidad de agua en cada cisterna que hay una relación de variación constante entre la secuencia de la construcción de las cisternas.	Realizará una tabla de datos donde consideren los elementos, número de cisterna, área de la base, volumen y cantidad de litros de agua, mediante la cual puedan comparar y postular una relación de variación entre ellas.
	Preguntas guía: ¿Cuánto es, cómo es y cuánto varía la base de las cisternas 1, 2 y 3? ¿Cuál es la altura de las cisternas 1, 2 y 3?¿Cuánto está variando la altura de las cisternas?¿Cuál es el volumen de las cisternas 1,2 y 3?¿Cuánto está variando el volumen de las cisternas?¿Cuánto está variando la cantidad de litros de agua de las cisternas con respecto al volumen?	
	Prácticas de modelación: Calcular, observar, interpretar y comparar.	
e) Formula una expresión o método que permita decir qué cantidad de agua tendrá cualquier cisterna.	Formulen expresiones a partir de analizar la tabla de datos y de su postulación de variación conjunta de las variables.	Formulará la expresión V=4h donde V es el volumen y h la altura. La expresión L=1000V donde L son los litros de agua y V es el volumen. La expresión L=4000h donde h es la altura y L son los litros de agua.
	Preguntas guía: ¿Qué expresión o método te permite obtener el volumen de la cisterna considerando la altura?¿Qué expresión o método te permite obtener la cantidad de litros de agua considerando el volumen?¿Qué expresión o método te permite obtener la cantidad de litros de agua considerando la altura?	
	Prácticas de modelación: Calcular, postular, formular, comparar e interpretar	
f) ¿Cómo podrías representar de otra manera la relación de la cantidad de litros de agua de la cisterna con la altura? Representa.	Representen por medio de una gráfica la relación entre la canti-dad de litros de agua y la altura.	Realizará una gráfica en la cual el eje X representa la altura de la cisterna y el eje Y representa la cantidad de litros de agua en ellas.
	Prácticas de modelación: Graficar, calcular, comparar	

Sección 3		
Indicaciones	**Intención**	**Argumentos esperados**
Usa los datos obtenidos anteriormente y contesta las siguientes preguntas. a) Reconoce ¿Qué tipo de comportamiento está representando la situación?	Identificará un comportamiento lineal y que la cantidad de litros de agua es proporcional a la altura de las cisternas.	Observen e identifiquen la forma en que van variando las variables elegidas en la situación, e interpreten los datos ya obtenidos. Por ejemplo, que los litros de agua son 4000 veces más que la altura.
	Preguntas guía¿Cómo comunicarías el comportamiento de la situación al considerar la cantidad de litros de agua y la altura?	
	Prácticas de modelación: Observar, especular e interpretar.	
b) ¿Cuál es la variable independiente y dependiente en la relación de la cantidad de agua de la cisterna con la altura?	Identificará que la variable independiente es la altura y la variable dependiente es la cantidad de litros de agua.	Interpreten que, la cantidad de litros de agua está relacionada con la altura de la cisterna. Significa que la cantidad de litros de agua está en dependencia de la altura.
	Prácticas de modelación: Interpretar y comparar.	
c) ¿Cuál es su dominio y rango en la relación de la cantidad de agua de la cisterna con la altura de las cisternas?	Identifiquen qué valores toman las variables L, V y h en la situación. Y en qué casos son dependientes e independientes.	Identificará que en la situación tenemos la función lineal L=4000 h, entonces el dominio son todos los valores h mayores o iguales a 0.5 m y el rango son los valores L mayores o iguales que 2000 m.
	Prácticas de modelación: Interpretar, calcular, observar y comparar.	
d) ¿Qué te permitió conocer la actividad planteada? ¿La puedes ocupar en algún aspecto de tu vida?	Reflexionen y reconozcan en que podrían utilizar lo que se plantea en la situación.	Reconocerá que la situación le permite saber la manera en que se puede obtener la cantidad de litros de agua en una cisterna usando el volumen, el cual depende del área de la base y la altura de la cisterna. Podría comentar que esto les puede servir para obtener cuántos litros de agua tiene la cisterna de su casa, estimar el promedio por día que gasta una familia y cuántos días aproximadamente alcanza el agua en su hogar
	Prácticas de modelación: Observar, examinar, reflexionar.	

Las intenciones por cada sección del diseño se sintetizan de la siguiente manera:

1: *Promueve el análisis de la situación de variación, para identificar qué cambia y qué permanece constante*. Surge un momento clave en la modelación, la elección de elementos que se pueden relacionar de tal manera que permitan describir e interpretar lo observado, que definirá el tipo de herramientas matemáticas producidas o empleadas por los estudiantes. La figura 2 muestra la THA global de la primera sección.

Figura 2.

Esquema de la THA para la sección 1

Nota: Fuente propia

2: *Caracteriza la relación entre las variables*. Se promueve el estudio de variables, cómo y cuánto varían. El estudio de las relaciones entre las variables provoca el uso de conocimientos matemáticos mediante tablas de datos, gráficas y expresiones algebraicas que comuniquen la variación. Se exhibirán por los estudiantes herramientas que permiten postular o ajustar el comportamiento a un comportamiento conocido, con esto se predice el comportamiento en un momento desconocido, a la par que sucede el consenso de las ideas matemáticas. En la figura 3 se muestran las THA global correspondientes.

Figura 3.

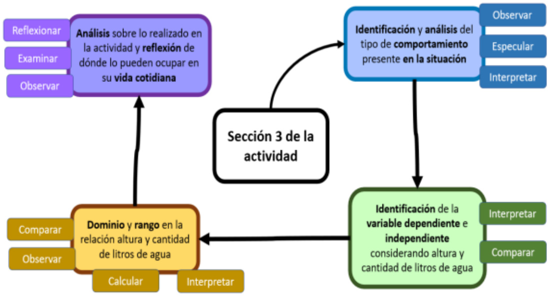
Esquema de la THA para la sección 2

Nota: Fuente propia

3: *Se enfatiza por el estudiante argumentos del comportamiento de la FL en la situación planteada.* Se emplean ejemplos por parte de los estudiantes en donde este tipo de razonamiento pudiera ser usado en su cotidianidad. Las preguntas c) y d) de la sección 3 (ver tabla 1) estás sustentadas por el programa de la SEP (2018) ya que en este se plantean como temas anteriores al de FL, la identificación de la variable dependiente e independiente, y la obtención del dominio y rango, por eso es viable agregar estas interrogantes en la situación de modelación. En la figura 4 se muestran las THA globales para la sección 3.

Figura 4.

Esquema de la THA para la sección 3



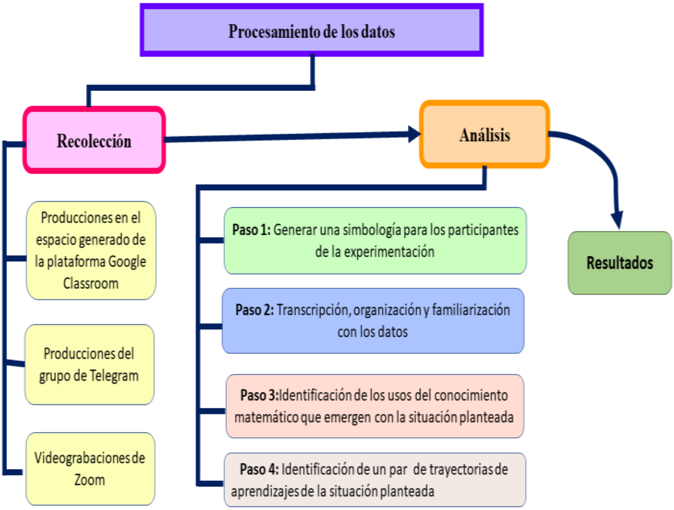
Nota: Fuente propia

Recolección de datos y su análisis

Una vez llevada a cabo la experimentación, se realizó la recolección y análisis de datos como se muestra en la figura 5. A la luz de los datos recabados se muestran un par de ejemplos de usos del conocimiento matemático identificados.

Figura 5.

Recolección y análisis de datos



Nota: Fuente propia

Análisis de datos para identificar usos del conocimiento matemático

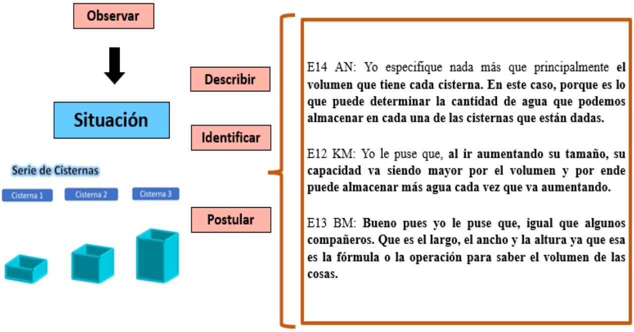
Con el análisis de los datos recabados de las videograbaciones de las clases sincrónicas, y los productos compartidos en telegram es posible distinguir que en la situación de modelación emergen los siguientes usos:

Uso del modelo algebraico para el volumen de la cisterna

E13 BM afirma que para obtener el volumen se necesita hacer una operación entre el largo, ancho y altura de la cisterna. Con esto se inicia la postulación de los modelos que permitió a los estudiantes enunciar y defender sus ideas (ver figura 6).

Figura 6.

Uso del modelo algebraico para el volumen de una cisterna



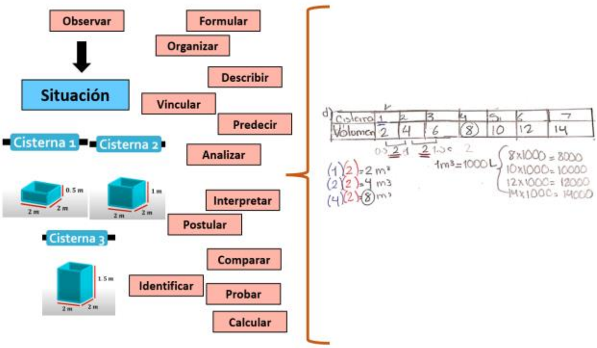
Nota: Fuente propia

Uso de las tablas de datos para predecir el cambio

E3 GB calcula el volumen de las primeras tres cisternas y postula que este cambia 2 metros cúbicos. Para observar el cambio, E3 GB hace uso de una tabla de datos, colocando el número de cisterna y el volumen correspondiente, estableciendo una relación entre ellas. Calcula y compara cómo y cuánto cambian los datos en las diferentes cisternas (ver figura 7).

Figura 7.

Uso de la tabla de datos para predecir el cambio



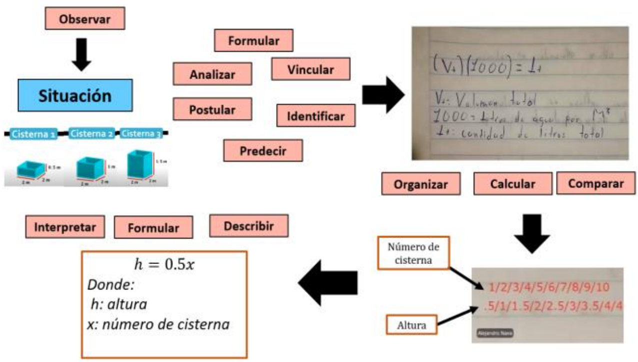
Nota: Fuente propia

Uso de las expresiones algebraicas para relacionar variables

Los estudiantes relacionan diferentes variables por medio de expresiones algebraicas. E14 AN analiza los datos numéricos ya obtenidos y vincula el volumen con la cantidad de litros de agua estableciendo una fórmula. Se provoca la reflexión e identifica que cada cisterna va aumentando su altura 0.5 metros. Realiza una tabla de datos donde la primera fila representa el número de cisterna y la segunda la altura de la cisterna. Menciona que hace uso de la tabla de datos para percatarse del aumento en la altura, por lo que interpreta los datos e identifica la variación como se muestra en la figura 8. La tabla le ayuda a realizar un registro y formular una manera de obtener la altura.

Figura 8.

Uso de las expresiones algebraicas para relacionar variables

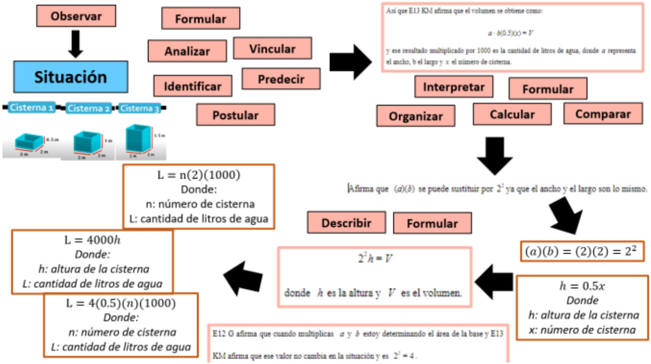


Nota: Fuente propia

En la figura 9, se muestra grosso modo las producciones de los estudiantes junto con las prácticas de modelación que están inmersas.

Figura 9.

Uso de las expresiones algebraicas para relacionar variables



Nota: Fuente propia

Uso de las gráficas para representar el cambio de las variables

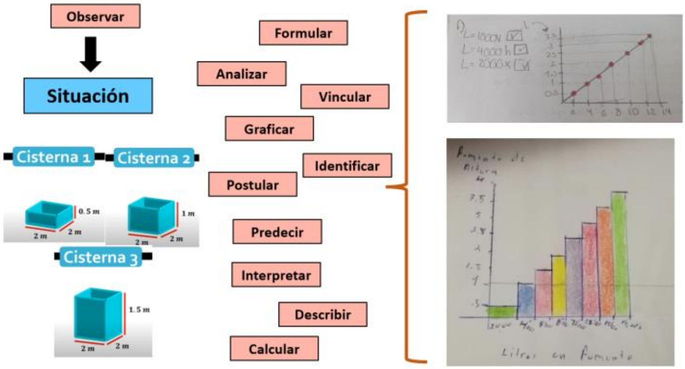
E3 GB gráfica en el plano cartesiano la relación entre las variables cantidad de litros de agua y altura. E3 GB describe que colocó los litros de agua, sin considerar los 0's que tienen los números, por ejemplo, la primera cisterna que tiene 2000 litros de agua, lo escribe como 2. Postula que la cantidad de litros de agua depende de la altura, por lo que los valores de la altura deben de ir en el eje Y y los valores de la cantidad de litros de agua en el eje X. Logra percatarse de quien es la variable dependiente e independiente, más sin embargo al graficarlas, relaciona los valores con los ejes de manera incorrecta.

E14 AN realiza una gráfica de barras donde representa el aumento de la altura de las cisternas y los litros de agua. Considera que la altura aumenta 0.5 metros entre cada cisterna y predice que la cantidad de litros de agua aumenta de 2000 en 2000.

Aun cuando se percata de quién es la variable dependiente e independiente, el estudiante coloca los valores de altura horizontalmente, y la cantidad de litros de agua verticalmente. En la figura 10 se muestra grosso modo las producciones de los estudiantes junto con las prácticas de modelación que están inmersas.

Figura 10.

Uso de las gráficas para representar el cambio de las variables



Nota: Fuente propia

Conclusiones

El diseño de la situación de aprendizaje y su implementación provocó el empleo de recursos tecnológicos que permitieran lograr generar un ambiente de aprendizaje en el ámbito virtual. En esta exploración fue fundamental la preparación de clase y repensar la función de los recursos tecnológicos ante la situación de modelación, de manera que se logrará una interacción continua entre el profesor y estudiante, un escenario en donde el estudiante exhibiera sus usos del conocimiento matemático. En este sentido el empleo del grupo en telegram fue un factor clave para el intercambio inmediato de las producciones de los estudiantes, que teóricamente dejó conocer los usos del conocimiento matemático.

La propuesta de la actividad es pertinente de acuerdo con los planes de estudio SEP (2017) y SEP (2018). Tal como la literatura reporta el trabajo con el diseño de actividades para la intervención, su gestión y análisis permite al docente reflexionar con mayor profundidad su papel de profesor de matemáticas, en tanto el saber matemático y la forma de provocar su desarrollo con los estudiantes para lograr resignificar a la función lineal.

La experiencia de realizar una preparación de experimento de enseñanza, y generar THA permite hacer un análisis posterior de lo que sucedió al implementar la actividad matemática, esto desde mi punto de vista como docente permitirá la mejora en la práctica docente.

Finalmente, con respecto a la situación de aprendizaje considerando la categoría de modelación escolar (Méndez, 2013), ésta provocó en primera instancia al docente reflexionar sobre los saberes matemáticos, y la funcionalidad de esta categoría en el aula mediante el diseño de las actividades concretas. Los productos permiten afirmar que la categoría de modelación escolar permite resignificar la FL, ya que la estructura de la misma actividad hace que emerjan los usos del conocimiento matemático que es como los estudiantes resignifican la FL.

Referencias bibliográficas

Campeón, M. C., Aldana, E. & Villa, J. A. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia,14* (2), 115-126.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica, 20*(1), 59-79.

Córdoba, F. J. (2011). *La modelación en Matemática Educativa; una práctica para el trabajo de aula en ingeniería* Tesis de maestría no publicada. *CICATA.*

Del Valle, T. (2010). *La Modelación de la función afín: una mirada socioepistemológica*. (Tesis de maestría no publicada), Universidad Pontificia Católica de Valparaíso. Chile.

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación, 37* (1), 29-42.

Méndez, M.E.M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar.* (Tesis de doctorado no publicada), Instituto Politécnico Nacional. México.

Méndez, M.E.M. & Cordero, F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 1603-1610. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29*(1), 75-88.

Pezoa, M. I. & Morales, A. (2016). El rol de la modelación en una situación que resignifica el concepto de función. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 11*(2), 52-64.

SEP (2017). *Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior*. SEMS.

SEP (2018). *Programa de estudio de bachillerato de Matemáticas IV*. SEMS.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 13* (1), 51-58.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 319-333.

Tocto, M. R. y Méndez M.E.M (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28,* 914-920. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISNN: 2448-6469

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *Tecnológicas, 19*, 63-85.

Zaldívar, D., Cen, C., Briceño, E., Méndez, M.E.M. y Cordero F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 17* (4-II), 417-436.

Razonamiento covariacional en estudiantes universitarios con la función logarítmica[9]

Martha Yadhira Roldán López - Marcela Ferrari Escolá

En este artículo presentamos un diseño de actividades matemáticas enfocadas a identificar los niveles de razonamiento covariacional que logran alcanzar estudiantes universitarios con la función logarítmica a través de la co-construcción de dos progresiones, una geométrica y otra aritmética. El diseño de las actividades se realizó con base en los niveles de razonamiento covariacional y, para analizar los niveles que podrían alcanzar los estudiantes en un ambiente digital, se implementó un experimento de enseñanza. Los estudiantes que participaron en la experimentación fueron cuatro alumnos de tercer semestre de la Licenciatura en Matemáticas en la UAGro. De acuerdo con los resultados obtenidos, encontramos que logran reconocer ambas progresiones, una geométrica en las abscisas y una aritmética en las ordenadas, así como trabajar con los aspectos aritméticos de los logaritmos, lo cual da evidencia del nivel de razonamiento covariacional que alcanzan en cada uno de los momentos.

Palabras clave: Covariación, Razonamiento Covariacional, Función logarítmica, Progresión Aritmética, Progresión Geométrica.

Introducción

Para presentar este trabajo, partiremos del análisis de investigaciones realizadas por autores como Siebert (2017), quien reporta que incluso después de completar una unidad sobre logaritmos, muchos estudiantes continúan esforzándose para razonar sobre ellos, lo que sugiere que no han desarrollado un significado útil para los logaritmos. En este artículo,

[9] Roldán López, M. Y. & Ferrari Escolá, M. (2021). Razonamiento covariacional en estudiantes universitarios con la función logarítmica. En N. Marquina, M. Ferrari & M. Méndez, (Eds.). *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 2* (pp. 101-116). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México.

comparten que el significado que normalmente los estudiantes logran desarrollar para los logaritmos limita tanto el conocimiento de los docentes, así como la capacidad de los estudiantes para comprender y razonar con logaritmos, al trabajar con la típica yuxtaposición de ecuaciones logarítmicas con ecuaciones exponenciales que comúnmente lleva a los estudiantes a un significado de conversión para logaritmos. A los estudiantes se les dice que $log_b a = c$ es equivalente a $a = b^c$, y luego practican repetidamente la reescritura de ecuaciones logarítmicas como ecuaciones exponenciales. Probablemente, a nosotros mismos nos enseñaron a pensar sobre logaritmos en términos de ecuaciones exponenciales. Siebert, caracteriza a los logaritmos no simplemente como la operación inversa a la exponenciación, sino que pretende darle significado a los logaritmos como el proceso de deshacer la exponenciación en lugar de hacer desaparecer a los logaritmos utilizando procedimientos aritméticos.

Por su parte, Weber (2019) analizó la historia de los logaritmos para mostrar por qué pueden entenderse como una división repetida, así como la división puede entenderse como una resta repetida. Señala que los maestros pueden hacer que los logaritmos sean significativos para los estudiantes comenzando con esta conceptualización, ya que no se refiere a exponentes, sino al más accesible concepto de división. Para entender la idea de Weber, en la figura 1 observamos un ejemplo.

Figura 1.
Las divisiones pueden verse como restas repetidas y los logaritmos pueden verse como divisiones repetidas.

$8 \div 2 = ?$	$\leftrightarrow$	$\underbrace{0+2+\cdots+2}_{?}=8$	$\leftrightarrow$	$\underbrace{8-2-\cdots-2}_{?}=0$
$\log_2 8 = ?$	$\leftrightarrow$	$\underbrace{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}_{?}=8$	$\leftrightarrow$	$\underbrace{8\div 2\div\cdots\div 2}_{?}=1$

Donde para obtener el logaritmo base 2 de 8 = 3, es posible entenderlo de una forma más sencilla al llevarlos al concepto de división, ya que el 8 debe dividirse entre 2 tres veces hasta llegar al 1, dado que el logaritmo base

2 de 8 pide el número de factores o divisiones para llegar a 1. Es de esta manera que Weber caracteriza a los logaritmos por medio de la resolución de ellos a través de operaciones aritméticas que les son más accesibles como lo es la división.

En una investigación anterior, Kaput (1994) (citado en Thompson y Carlson, 2017) argumentó que las concepciones emergentes de valores de cantidades que varían continuamente eran centrales para la aparición del cálculo. El argumento de Kaput también respalda la afirmación de que las concepciones emergentes de covariación fueron fundamentales para el desarrollo de la idea matemática de la función. En Thompson y Carlson (2017), van un paso más adelante, ya que enfatizan que el razonamiento covariacional continuo, o el razonamiento sobre valores de dos o más cantidades que varían simultáneamente, desempeñó un papel crucial en la invención de los conceptos matemáticos que condujeron a la definición moderna de función. Además, argumentan que las ideas de variación continua y covariación continua son epistemológicamente necesarias para que los estudiantes y maestros desarrollen concepciones de funciones útiles y sólidas, es decir, que el razonamiento variacional y covariacional es fundamental para el desarrollo matemático de los estudiantes.

De acuerdo con lo reportado en Ferrari y Farfán (2010), lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición; mismas que incentivan a analizar a la covariación. Además, señalan que, a partir de grupos de discusión con profesores, se observa que coinciden con su poco acercamiento a los logaritmos; apreciándose la frecuente ausencia de espacios para discutirlos con los estudiantes, debido a la densidad de conceptos que deben impartir en cursos de álgebra.

En Kuper y Carlson (2020), señalan que es útil para los estudiantes reconocer primero que la función logarítmica relaciona los valores de dos cantidades ya que sus valores varían juntos. Y que a medida que los estudiantes continúan considerando cómo los valores de las dos cantidades están cambiando juntos para transmitir más un comportamiento de función global de una función logarítmica, se dice que están participando en el razonamiento covariacional. Puesto que señalan que, si una meta educativa es que los estudiantes puedan acceder y usar la idea de logaritmo para modelar relaciones cuantitativas, sería de gran beneficio para los estudiantes si se les apoya en la conceptualización de cantidades, sus relaciones y cómo varían juntas.

Para nuestro trabajo, consideramos la propuesta de Ferrari y Farfán (2010), en la cual trabajan en dos mundos distintos, el de multiplicar y el de sumar interrelacionados, y según sus resultados, esto permitió que los alumnos establecieran el argumento de que "si reconocen una progresión geométrica y una aritmética entonces están hablando de una curva logarítmica"; que es esencia de lo logarítmico; el isomorfismo de mundos donde ambas operaciones funcionan, pero que al reconocerlas covariacionalmente lleva a definir a los logaritmos. Así como la postura de Kuper y Carlson (2020), la cual se enfoca en la importancia de la función logarítmica a partir del razonamiento covariacional, dada la importancia de dos cantidades de valores que varían juntos.

Objetivo de la investigación

El objetivo de nuestra investigación es identificar los niveles de razonamiento covariacional alcanzados por estudiantes universitarios al trabajar con la función logarítmica a través de la covariación de dos progresiones, una geométrica y la otra aritmética.

Por tal motivo, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el nivel del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial que logran alcanzar estudiantes universitarios al participar en un experimento de enseñanza?

Razonamiento Covariacional

El razonamiento covariacional como construcción teórica apareció a finales de los años 80 y principios de los 90 en las obras de Jere Confrey y Pat Thompson. Confrey caracterizó la covariación en términos de coordinar los valores de dos variables a medida que cambian; en tanto que, Thompson caracterizó la covariación en términos de conceptualizar los valores de las cantidades individuales como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades como variables simultáneas (Thompson y Carlson, 2017). En el trabajo reportado por Confrey y Smith (1995), enfatizan la centralidad de las secuencias en su significado de covariación: "En un enfoque de covariación, una función se entiende como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales se genera independientemente a través de un patrón de valores de datos" (Confrey y Smith, 1995, p. 67).

Según la teoría del razonamiento cuantitativo de Thompson, una persona razona covariablemente cuando visualiza dos valores de cantidades variables y los ve simultáneamente. El marco de Carlson et al., (2002) retoma la conjetura de Saldanha y Thompson (1998) de que el razonamiento covariacional es evolutivo. Especifica niveles de acciones mentales y niveles de competencia que se vuelven más sofisticados con respecto a la naturaleza de la coordinación de los valores de las cantidades de un estudiante, por ejemplo, atendiendo a las cantidades o la dirección de los cambios en los valores de las cantidades. Su marco extendió el significado de covariación de Saldanha y Thompson para incluir la coordinación de los estudiantes de las tasas promedio e instantáneas de cambio de una cantidad con respecto a otra cantidad, ya que los valores de las dos cantidades varían.

De acuerdo con Thompson y Carlson (2017), un investigador puede utilizar los datos de la tabla 1, para describir una clase de comportamientos, o podría usarlo como una característica de la capacidad de una persona para razonar de forma variada o covariacional. Además, consideran esencial prestar atención a cómo los alumnos piensan que los valores de las cantidades varían y cómo están uniendo los valores de las cantidades al considerar sus significados para la covariación.

Tabla 1.
Niveles de Razonamiento Covariacional

Nivel	Descripción
5. Covariación continua suave	La persona visualiza aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como si ocurrieran simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualiza ambas variables variando suave y continuamente.
4. Covariación continúa fragmentada	La persona visualiza cambios en el valor de una variable como si ocurrieran simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualiza ambas variables variando con variación continua fragmentada.
3. Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y).
2. Coordinación gruesa/bruta de valores	La persona forma una imagen fragmentada/bruta de los valores de las cantidades que varían juntas, como "esta cantidad aumenta mientras que la cantidad disminuye". La persona no imagina que los valores individuales de las cantidades vayan juntos. En cambio, la persona visualiza un vínculo flexible y no multiplicativo entre los cambios generales/globales en los valores de dos cantidades.
1. Pre-coordinación de valores	La persona visualiza los valores de dos variables variando, pero asincrónicamente: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera, etc. La persona no anticipa la creación de pares de valores como objetos multiplicativos.
0. Sin coordinación	La persona no tiene una imagen de las variables que varían juntas. La persona se enfoca en la variación de una u otra variable sin coordinación de valores.

Experimentos de Enseñanza

De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). Ocurren en contextos de la vida real donde habitualmente se produce algún tipo de aprendizaje (Molina et al., 2011). Exige la participación de diferentes tipos de agentes que aportan variados grados y tipos de experiencia; entre ellos la persona que actúa como docente, la cual ha de estar completamente implicada en el estudio (Barab y Squire, 2004). Consta de tres fases, las cuales son: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo de los datos; en cada una de ellas se desarrollan distintas acciones, por parte de los investigadores.

Consideramos que los experimentos de enseñanza crean el ambiente adecuado para el objetivo planteado, en donde se pretende identificar el nivel de razonamiento covariacional que logran alcanzar estudiantes de la licenciatura en matemáticas, al observar si lograron realizar una conexión entre ambas progresiones; una geométrica y la otra aritmética. Además de que podremos analizar la efectividad del diseño de las actividades propuestas y de acuerdo con ello, para futuras investigaciones realizar un posible rediseño con base en los datos obtenidos a través de la recolección y análisis de los datos mediante la videograbación de las sesiones, así como de la transcripción del audio durante la puesta en escena.

Diversos autores señalan que la instrucción enfocada en enseñar la idea de logaritmo no ha sido ampliamente efectiva para ayudar a los estudiantes a comprenderlos. Además, sugieren que los esfuerzos para apoyar a los estudiantes en el aprendizaje de los logaritmos incluyen coordinar secuencias aritméticas y geométricas. Por tal motivo nuestra pregunta de investigación está enfocada en identificar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial que muestran estudiantes universitarios al participar en un taller, donde nos enfocamos en analizar la interacción de los estudiantes con los logaritmos en su papel de estudiantes universitarios.

Para llevar a cabo la experimentación, se realizó la gestión del taller de manera virtual en dos momentos; en un primer momento se trabajó con los aspectos aritméticos de los logaritmos, y en un segundo momento se trabajó en específico con la función logarítmica. En la siguiente tabla (tabla 2) se muestra con más detalle las características de la gestión.

Tabla 2.
Gestión de Clase (Taller)

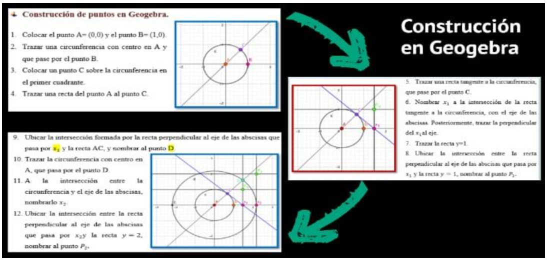
<table>
<tr><td>Actividad</td><td colspan="3">Covariación Logarítmica</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tiempo</td><td rowspan="2">200 minutos</td><td>Momento I</td><td>100 minutos</td></tr>
<tr><td>Momento II</td><td>100 minutos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Participantes</td><td rowspan="3">Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas</td><td>Número de alumnos</td><td>4 alumnos</td></tr>
<tr><td>Grado- Grupo</td><td>III semestre</td></tr>
<tr><td>Turno</td><td>Matutino</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Forma de trabajar</td><td>Momento I
Uso aritmético de los logaritmos</td><td colspan="2">La actividad se envía vía Classroom y a partir de ella, se trabaja mediante una sesión síncrona. Se hace uso de Geogebra, así como una pizarra de Jamboard. Se trabaja por equipos de 2 estudiantes por sala de Zoom, para luego compartir en la sala principal sus argumentos provenientes de los consensos previamente establecidos (grupal y por equipos).</td></tr>
<tr><td>Momento II
Función logaritmo</td><td colspan="2">Se generalizan los argumentos obtenidos por los participantes a partir de la construcción de puntos realizada en Geogebra, así como cuestiones aritméticas propias de los logaritmos, hasta lograr obtener la continuidad de esta.</td></tr>
</table>

Participantes y contexto

La experimentación se realizó por medio de un taller de covariación logarítmica-exponencial el cual se impartió frente a cuatro alumnos de tercer semestre pertenecientes a la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Matemáticas, nodo Acapulco de la UAGro. Dicho taller se realizó en colaboración con la profesora a cargo de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas, en modalidad virtual debido a las condiciones por la pandemia. Las sesiones se llevaron a cabo de manera síncrona mediante el uso de distintas plataformas para lograr el trabajo por equipo, así como con algunas tareas asíncronas.

El taller se llevó a cabo en dos fases con la implementación de diversas actividades matemáticas con alumnos universitarios, los cuales desempeñan el rol de estudiantes. En la primera, participaron en un taller de la función exponencial; en el cual los estudiantes realizaron la construcción geométrica de la función exponencial con el uso del software de Geogebra como un disparador de la actividad matemática, diseño que recupera argumentos de la matemática del siglo XVIII, en particular del libro de Cálculo de Agnesi (Ferrari, et al. 2017), donde la semejanza de triángulos es la herramienta principal del contenido a abordar. La segunda fase estuvo a cargo del primer autor de este reporte en donde estos mismos estudiantes trabajaron con la función logarítmica con el uso del software de Geogebra como disparador de la actividad, pero ahora rescatando ideas de Descartes (Confrey & Smith, 1997) donde la construcción geométrica de puntos inicia el estudio de variaciones, una aritmética y otra geométrica.

Esquema;
Construcción de Descartes



En el plan de estudios vigente de la Licenciatura en Matemáticas de la UAGro (2019), se llevan varios cursos que atienden el estudio de la variación y el cambio, principalmente Precálculo, Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III y Cálculo IV, siendo estas materias en donde se enmarca el contenido matemático que se pone en juego en el diseño de esta investigación. Los logaritmos también están presentes en el programa de Álgebra Básica, priorizándose en ellos su papel de facilitador de cálculos, es decir, como herramienta para resolver ecuaciones exponenciales.

La introducción de los logaritmos en el discurso matemático escolar se produce en cursos de Cálculo del nivel medio superior. En los programas educativos de bachillerato (SEP 2017) encontramos a la función logarítmica dentro del temario, ya que pertenece a las funciones trascendentes; pero comúnmente es tratada de manera algorítmica, partiendo de la función exponencial y relacionándola como su inversa (Ferrari y Farfán, 2010). El suponer que los participantes del experimento de enseñanza obtuvieron estos conocimientos durante su estancia por el bachillerato, y que se complementan con el currículo del plan de estudio de la Licenciatura en

Matemáticas, nos motiva a realizar dicha exploración acerca del razonamiento covariacional mostrado al trabajar en un taller logarítmico-exponencial.

Tareas

Posterior a la construcción de Geogebra, se trabaja con las actividades propuestas, las cuales se especifican en las tablas que aparecen a continuación. En la tabla 3, se establecen los niveles de razonamiento covariacional que se espera lograr durante cada una de las tareas a desarrollar en el momento I (uso aritmético de los logaritmos), detallando cuál es la actividad matemática en específico que el alumno debe realizar.

Tabla 3

Momento I (Niveles de Razonamiento Covariacional)

<table>
<tr><th></th><th>Nivel 0</th><th>Nivel 1</th><th>Nivel 2</th><th>Nivel 3</th></tr>
<tr><td>Actividad. Construye los puntos abstrayendo las coordenadas.</td><td>Sin coordinación.
La persona no tiene una imagen de las cantidades que varían juntas. Construye puntos con dos estrategias distintas, donde las “y” implica trazar una horizontal a distancia 1 y las abscisas las construye geométricamente.</td><td rowspan="3">Pre -coordinación de valores.

La persona se enfoca en que la variación de las abscisas corresponde a multiplicar por una constante y que la variación en las ordenadas corresponde a la adición de un valor constante, pero sin coordinación de valores.</td><td rowspan="5">Coordinación gruesa de valores.

La persona se enfoca en la variación de las abscisas y ordenadas de manera separada para determinar los puntos anteriores mediante el uso de las operaciones inversas a las utilizadas en el nivel anterior.</td><td rowspan="7">Coordinación de valores.

La persona coordina los valores de la variable (x) que corresponden a una progresión geométrica, con los valores de la variable (y) que corresponden a una progresión aritmética.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea:
1.1 Rellena la tabla a partir de las coordenadas de los puntos obtenidos (P1, P2, P3) en la construcción de Geogebra.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad.
Predecir el siguiente punto.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tarea:
1.2 ¿Cuál es la estrategia aritmética que utilizaron para predecir los siguientes puntos de la construcción?</td></tr>
<tr><td colspan="3">Actividad.
Encontrar la estrategia aritmética y geométrica que permita hallar los puntos anteriores a los ya construidos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Tarea:
1.3 ¿Será posible construir más puntos hacia la izquierda del P_1? ¿cómo? (utilicen al menos dos estrategias distintas: con tablas de datos y haciendo uso del software de Geogebra).</td></tr>
<tr><td colspan="4">Actividad.
Hallar las reglas aritméticas que permiten construir un nuevo punto a partir de dos ya conocidos, los cuales están determinados por las leyes de los logaritmos.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Tarea:
1.4 Tomando un par de los puntos construidos geométricamente, determinar otro punto de la curva.
¿Qué estrategia utilizarías?
Colocar ejemplos de cómo funciona tu estrategia.</td></tr>
</table>

En la tabla 4 podemos observar la descripción de los niveles de razonamiento covariacional que se desprende de cada una de las preguntas de la actividad presentada en el momento II.

Tabla 4

Formato de análisis (Momento II: Función Logarítmica)

<table>
<tr><th></th><th>Nivel 1</th><th>Nivel 3</th><th>Nivel 4</th></tr>
<tr><td>Actividad. Construye puntos a través de la estrategia aritmética hallada en el Momento I.</td><td>Pre -coordinación de valores. La persona se enfoca en que la variación de las abscisas corresponde a multiplicar por una constante y que la variación en las ordenadas corresponde a la adición de un valor constante, pero sin coordinación de valores.</td><td rowspan="3">Coordinación de valores.

La persona coordina los valores de la variable (x) que corresponden a una progresión geométrica, con los valores de la variable (y) que corresponden a una progresión aritmética.</td><td rowspan="5">Covariación continua fragmentada.

La persona visualiza cambios en el valor de una variable como si ocurrieran simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualiza ambas variables variando con variación continua fragmentada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea:
2.1 Deslicen el punto C sobre la circunferencia, hasta colocar el P_2 en (2.25, 2). Y de acuerdo con los datos obtenidos, completen la siguiente tabla.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad.
Reconoce aquellos puntos que pertenecen a la construcción, y además descarta los valores negativos y el cero en la progresión geométrica (abscisas).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tarea:
2.2 Observen el comportamiento de los datos registrados. ¿Será posible obtener los siguientes puntos?
(-2, __), (_, -4), (_1.5), (4.14, __), (0, _)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Actividad.
Reconoce la función, así como la base de esta.
Identifica la variación de la base de la función logarítmica a partir de la construcción de geometría dinámica en Geogebra.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Tarea:
2.3 ¿Reconocen a qué curva corresponden los puntos de la tabla anterior? Si es así, prueben con Geogebra para corroborar.
2.4 ¿Qué ocurre con los puntos P1, P2, P3, etc., al deslizar el punto C sobre la circunferencia?
¿Siguen perteneciendo a la misma curva?
¿Qué tipo de función es? y ¿cómo determinar con exactitud la función que corresponden los datos de la tabla?</td></tr>
</table>

Recolección de datos y su análisis

Para realizar la recolección de los datos se hizo uso de diversas plataformas que permiten la recopilación de la información en la nube. Partimos del uso de Screencast o matic, cuya herramienta nos sirvió como apoyo con la videograbación por parte de la investigadora-docente de un video tutorial para los estudiantes acerca de cómo construir los puntos de Geogebra con los cuales estarían trabajando en las sesiones síncronas. El uso del software de Geogebra por parte de los estudiantes es fundamental para la construcción de los puntos (geometría dinámica) con que trabajaron las actividades. La herramienta de Classroom permitió cargar las actividades para que los estudiantes trabajarán de forma asíncrona, tales como la construcción en Geogebra, así como los informes previos o posteriores a lo realizado en las sesiones síncronas.

Por último, para las sesiones síncronas se trabajó con la pizarra digital de Jamboard para que los estudiantes tuvieran la oportunidad de trabajar en conjunto con las tareas a realizar. Así como el uso de la plataforma Zoom para realizar la videograbación de las sesiones síncronas, ya que cuenta con la opción de trabajar por medio de salas (en equipos o de forma grupal).

Se utilizará la siguiente nomenclatura para identificar a cada uno de los participantes:

Tabla 5.
Nomenclatura de los participantes

Participante	Nomenclatura
Profesor investigador	P1
Profesor observador (1)	P2
Profesor observador (2)	P3
Estudiante 1	E1
Estudiante 2	E2
Estudiante 3	E3
Estudiante 4	E4

Resultados

En la primera sesión del experimento de enseñanza se trabajó con cuatro estudiantes universitarios de manera síncrona en un ambiente virtual. Con antelación se les compartió, por medio de Classroom, el recetario para la construcción de los puntos de la curva a estudiar en Geogebra, elemento que se utilizaría en el desarrollo de las actividades en la sesión síncrona. El primer informe para realizar previo a la sesión consistió en el llenando de una tabla de datos a partir de los puntos generados en Geogebra y posteriormente predecir, de manera algebraica, los siguientes puntos de la curva.

Tarea: 1.1 Rellena la tabla a partir de las coordenadas de los puntos obtenidos (P1, P2, P3) en la construcción de Geogebra.

Dado que no hubo restricciones en cuanto a la forma de trabajar la tarea asíncrona, tres de los estudiantes (E1, E2 y E3) se reunieron y trabajaron en equipo una misma tabla de datos (Figura 2a), en tanto que la última estudiante (E4) trabajó de manera individual (Figura 2b).

Figura 2.

a)Tabla de datos E1, E2 y E3

Punto	Abscisa	Ordenada
P1	1.6	1
P2	2.56	2
P3	4.1	3
P4	6.57	4
P5	10.51	5
P6	16.83	6
P7	25.8	7

(a)

b) Tabla de datos E4

Punto	Abscisa	Ordenada
P1	1.48	1
P2	2.19	2
P3	3.24	3
P4	4.8	4
P5	7.1	5
P6	10.5	6
P7	15.55	7

(b)

Durante la sesión síncrona ambas ideas se colocaron en la plataforma de Jamboard para identificar los datos que trabajó cada uno. Como no se indicó en la tarea la posición del punto "C", intersección de la recta guía y la circunferencia, los equipos obtuvieron distintas tablas de datos, propiciando una discusión sobre cómo extender las tablas con el fin de que percibieran que, si bien los datos difieren, el mecanismo de construcción es el mismo.

Obtenidas las coordenadas de los puntos de la curva a estudiar, construyendo geométricamente los primeros tres puntos y prediciendo los siguientes tres, se les demanda que expliquen cómo lograron rellenar la tabla que presentaban mediante la:

Tarea: 1.2 ¿Cuál es la estrategia aritmética que utilizaron para predecir los siguientes puntos de la construcción?

Uno de los participantes mencionó lo siguiente: "E2: Por como construimos las ordenadas, siempre iban a ir sumándose de uno en uno ¿no?, por ejemplo, el punto P_8 sería 7+1, iban a ir de uno en uno las ordenadas; y, las abscisas nos dimos cuenta de que era la abscisa anterior multiplicada por 1.6, y así obtendremos los demás puntos que quisiéramos". De acuerdo con la respuesta de E2, observamos que se enfoca primero en descubrir, en la construcción la variación de las ordenadas y posteriormente en describir la variación de las abscisas. Los participantes E1, E2 y E3 trabajaron en una misma idea, lo cual da evidencia de que alcanzan el nivel 1 (pre-coordinación de valores), ya que se enfocaron en que la variación de las abscisas corresponde a una progresión geométrica (aunque por el momento solo se enfocan únicamente en la operación) y que la variación en las ordenadas corresponde a una progresión aritmética (enfocándose en la adición).

En un proceso de estabilizar los argumentos que los participantes expresan sobre cómo extender los patrones de crecimiento de los valores de las abscisas y ordenadas de los puntos determinados, se les cuestiona:

Tarea: 1.3 ¿Será posible construir más puntos hacia la izquierda del P_1? ¿cómo? (utilicen al menos dos estrategias distintas: con tablas de datos y haciendo uso del software de Geogebra).

Al solicitarles trabajar con la construcción de puntos hacia la izquierda (puntos anteriores a los ya construidos), surgió la duda acerca del punto del origen, donde E3 se cuestiona si el punto anterior, es decir, P_0 es el origen o no. Posteriormente, el participante E1 menciona lo siguiente: "E1: Pues, según eso, para ir hacia atrás, de P_2 a P_1, a la ordenada de P_2, se le resta 1 y se obtiene la ordenada de P_1. Y a la abscisa de P_2, se divide entre 1.48 y se llega a la abscisa de P_1. Si seguimos esas mismas… de P_1 a P_0, sería 0 en la ordenada, y 1 en la abscisa, o sea, (1,0)". En este extracto, la estrategia aritmética que propone E1 acerca de cómo obtener cada uno de los puntos anteriores de acuerdo con los datos que tienen, donde el razonamiento covariacional que muestra prevalece en el nivel 1 (pre- coordinación de valores), ya que describe su estrategia para cada una de las variables por separado.

Una vez que ambos equipos construyen más puntos (tanto a la derecha como a la izquierda), E3 menciona: "según yo, ya partí de… como son números muy pequeños, la curva ya no es como yo pensaba", a lo que P1 le pregunta que cómo creía que sería la curva y él responde "pensé que era algo más simétrico", lo cual muestra indicios de estar conectando los valores de sus tablas de datos con una imagen gráfica de la construcción de puntos en Geogebra. Ya que, de manera previa, E3 había comentado lo siguiente: "Las abscisas, a partir del P_-1, podrían ser los mismos valores que los negativos…", aunque la profesora P1 fue insistente respecto a continuar trabajando con la estrategia aritmética que habían encontrado.

De este modo se realizó el análisis de los datos. Los resultados aquí mostrados son la muestra del análisis de la información recabada acerca de las producciones llevado a cabo por cada uno de los participantes en la primera sesión síncrona.

Conclusiones

Según distintos investigadores, señalan que muchos estudiantes luchan por desarrollar una comprensión coherente de la notación, de las propiedades y la función logarítmica; es por ello por lo que parte del trabajo realizado mediante este taller involucra el uso de algunas de las propiedades de los logaritmos. Los estudiantes que participaron en el taller logran reconocer ambas progresiones, una geométrica en las abscisas y una aritmética en las ordenadas e identifican las reglas que funcionan para operar entre cada par de puntos, tanto para la multiplicación, como para la división. Logran trabajar de acuerdo con los aspectos aritméticos que se les solicitan, los cuales van desde localizar puntos medios entre un par de puntos conocidos, así como descartar aquellos puntos que no pertenecen a la construcción.

Referencias Bibliográficas

Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-based research : Putting a stake in the ground Related papers Design-Based Research : Putting a Stake in the Ground. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 1–14.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento Covariacional Aplicado a la Modelación de Eventos Dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Journal for Research in Matthematics Education*, *8*(2003), 121–156.

Ferrari-Escolá, M., Martinez-Sierra, G., & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. The Journal of Mathematical Behavior, 42, 92-108.

Ferrari, M., Bonilla, J. A., & Trejo, M. (2017). Papiroflexia y Geometría Dinámica para discutir covariación en Coordenadas Polares. *Investigación e Innovación En Matemática Educativa*, *II*(1998), 145–156.

Ferrari, M., & Farfán, R. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, RELIME*, *13*(4), 53–68.

Kuper, E., & Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior*, *57*(1323753), 0–39. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de loss Experimentos de Enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

Quintanilla, J. (2018). Developing Intuition for Logarithms. *The National Council of Teachers of Mathematics*, *112*(1).

SEP. (2017). Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior. México: SEMS.

Siebert, D. K. (2017). Powerful Meanings For Logarithms. *Mathematics Teacher*, *110*, 662–666.

Steffe, L., y Thompson, P. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. Research design in mathematics and science education, 267-307.

Thompson, P., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In *Compendium for Research in*

Mathematics Education (pp. 421–456). http://pat-thompson.net/PDFversions/2016ThompsonCarlsonCovariation.pdf

Weber, C. (2019). MAKING SENSE of Logarithms as Counting Divisions. *The National Council of Teachers of Mathematics*, *112*(5).

Reflexiones sobre fundamentos estocásticos

Identificar ideas fundamentales de estocásticos y enfoques de probabilidad en docentes de matemáticas en formación inicial[10]

Javier García Pineda - María Esther Magali Méndez Guevara

La formación del Docente en los diferentes niveles educativos, ha tomado importancia en las últimas décadas, además se ha reflexionado en conocimientos matemáticos más específicos. Este proyecto se interesó por investigar la formación del docente de matemáticas del nivel medio superior, en particular sobre los estocásticos. En un análisis de mallas curriculares de las universidades que ofrecen formación docente de futuros profesores de matemáticas y los estándares que establecen los planes y programas del nivel medio superior y nivel secundaria, se identificó una distancia entre lo que aprende el profesor y lo que debe enseñar. Particularmente interesó identificar ¿cuáles son los argumentos de los profesores, sobre ideas fundamentales y enfoques de probabilidad?, para esto se elaboró una actividad basada en las ideas fundamentales y los enfoques de probabilidad, y mediante un experimento de enseñanza, desarrollado con profesores en formación inicial, se confirma que hace falta espacios académicos para fomentar el pensamiento estocástico en la formación inicial del docente.

Palabras Clave: Formación Inicial Docente, Pensamiento Estocástico.

---

[10] García Pineda, J. & Méndez Guevara, MEM (2022). Identificar ideas fundamentales de estocásticos y enfoques de probabilidad en docentes de matemáticas en formación inicial. En N. Marquina, M. Ferrari & M. Méndez, (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 3* (pp. 119-134). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México

Introducción

La formación inicial del docente va más allá de proveer de teorías, metodologías y saberes disciplinares o tecnológicos, ya que se requiere hacer vivir momentos de vinculación con el ámbito en donde desarrollarán su profesión, y establecer lineamientos que les permitan reflexionar sobre su práctica docente (Sáez, Campos, Suckel & Rodriguez, 2019; Vaillant y Manso, 2012; Versub, 2007).

Como es de conocimiento general los docentes de los tres primeros niveles de la educación básica (preescolar, Primaria y Secundaria) tienen oportunidad de formarse en escuelas especializadas, las normales, escuelas que en su estructura curricular plantean estrategias para preparar a los estudiantes próximos a ser docentes de algún nivel en específico, entre estas la inmersión en el aula. Aunque de acuerdo con lo reportado por Aké y López-Mojica (2020) los maestros normalistas tienen una formación general e imparten diversas áreas del conocimiento incluyendo el matemático, la preparación de estos profesores no incluyen preparación en el área de matemáticas, y solo para los profesores de nivel secundaria se propone una especialidad.

Por otro lado, la preparación del docente del nivel medio superior aún no tiene una única estructura, en el sistema educativo, más bien se especializan mientras viven la experiencia de ser docentes de matemáticas. Los perfiles profesionales de los profesores son variados, pero lo común es la demanda por el sistema educativo sobre reconocer los diferentes tipos de pensamientos matemáticos que va a promover entre sus futuros estudiantes. Uno de ellos es el pensamiento estocástico, las investigaciones reportadas han identificado falta de comprensión por parte de profesores y por ende de estudiantes (Cuevas & Ramirez, 2018). Por esto fue pertinente indagar al respecto de la formación inicial del profesor de matemáticas y hacer una propuesta para fomentar en ellos su identificación e interés en este tipo de pensamiento matemático.

Marco Conceptual

Esta investigación, reconoce la necesidad de estudiar la formación inicial del docente de matemáticas, particularmente se indago sobre el pensamiento estocástico en la formación inicial de profesores de matemáticas.

El interés sobre el pensamiento estocástico fue detonado por reportes como los de Burbano y Valdivieso (2014), quienes aseguran que los profesores encargados de la enseñanza de probabilidad y estadística la desarrollan de acuerdo con lo que ellos aprendieron en su momento, por lo tanto se manifiestan algunas fortalezas y debilidades en algunos casos, ya que no se tiene conocimiento disciplinar y pedagógico en el área de educación estocástica.

La investigación se sostiene de un marco conceptual que considera que los profesores deben comprender diez ideas que fundamentan los conocimientos sobre probabilidad y estadística y cuatro enfoques que son parte del desarrollo y comprensión de los conocimientos matemáticos de este tipo

Heitele (1975) consideró una serie de ideas fundamentales como aquellas ideas que permiten que el individuo obtenga modelos explicativos en las diferentes etapas de su desarrollo, siendo estas tan eficientes y de esta forma poder distinguir sus niveles cognoscitivos de forma lingüística y de elaboración.

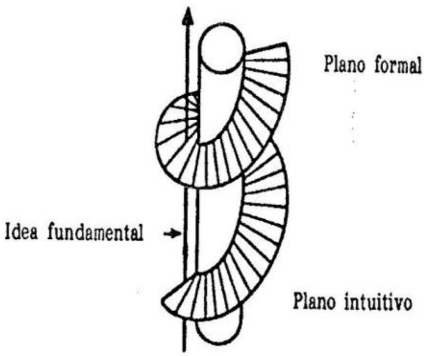
Establecer como prioridad el estudio de las ideas fundamentales en el desarrollo adecuado del ser humano, permite la adquisición de un conocimiento analítico. Tal como menciona Heitele (1975), el establecimiento intuitivo previo es urgente en estocástico ya que si se adquieren modelos explicativos inadecuados es posible desarrollar intuiciones firmemente arraigadas, por tal motivo es necesario establecer principios de organización como son las ideas fundamentales que servirán como guías a través de la espiral curricular.

Espiral curricular: la interpretación que se ha considerado para esta investigación, es que el sujeto requiere estar en un plano intuitivo mismo que sugiera Heitele (1975) deberá pasar a un plano formal, haciendo uso de las ideas fundamentales.

Teniendo claro que las ideas fundamentales juegan un papel importante en el desarrollo cognoscitivo del ser humano es importante identificarlas. A continuación se enumeran (Heitele, 1975, pp.12-23; Batanero, 2005; Sánchez, 2009).

Figura 1*:*

Del plano intuitivo al plano formal.



Nota: se considera importante identificar el proceso del paso de lo intuitivo a lo formal

Fuente: Heitele (1975)

1. Normando las expresiones de nuestra creencia.
2. El campo de probabilidad.
3. Combinación de probabilidades. La regla de adición.
4. Combinación de probabilidades. Independencia.
5. Equidistribución y simetría
6. Combinatoria.
7. Modelo de una urna y simulación
8. La idea de variable estocástica
9. La ley de los grandes números.
10. La idea de muestra.

Además de estas ideas fundamentales, se han generado distintos estudios que reportan cómo podemos fomentar el pensamiento estocástico, Batanero (2005) sugiere que los enfoques de probabilidad deberían ser incluidos de forma progresiva, partiendo de las ideas intuitivas y considerar necesario un tránsito flexible entre estos enfoques, Vásquez y Alsina (2019) aseguran que el estudio de probabilidad ha preocupado al profesorado en mejorar su enseñanza y considera, que estos deberían estar conscientes de sus distintos significados de probabilidad. En tanto se "sugiere que los docentes empleen el uso de ideas intuitivas de los alumnos para incorporar de manera gradual los significados de la probabilidad" (López-Mojica y Aké, 2019, p. 3).

Enfoque intuitivo

La interpretación a este enfoque está dirigido hacia el grado de creencia que el individuo adquiere de acuerdo a su experiencia y creencias, en este enfoque se hace uso de expresiones como, (considero, yo creo, según lo que se, me imagino que…)

Enfoque frecuencial

De acuerdo con Batanero (2005) quien cita a Bernoulli (1987/1713) quien asegura que podríamos asignar probabilidades a diversos eventos partiendo de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos de un experimento. Su demostración de la primera ley de los grandes números fue aceptada en su época como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad.

Enfoque Clásico

Tiene su importancia en el cálculo de probabilidades de forma teórica, para este enfoque no es necesario llevar a cabo la experimentación, se considera para eventos de números finitos, que puede ser calculado como una fracción en donde el numerador representa el número de casos favorables y el denominador el total de casos posibles.

Enfoque axiomático

Borel contempló la probabilidad como un tipo especial de medida, mientras que, Kolmogorov usó esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática que han aceptado todas las escuelas.

Estos elementos forman el marco conceptual bajo el cual una actividad matemática que permitió reconocer, si el profesor de matemáticas en formación inicial hace uso de estas ideas fundamentales y que enfoques de probabilidad sostienen sus argumentos matemáticos, o bien provocar su identificación mediante la misma actividad.

Metodología.

Un experimento de enseñanza para reconocer ideas sobre probabilidad.

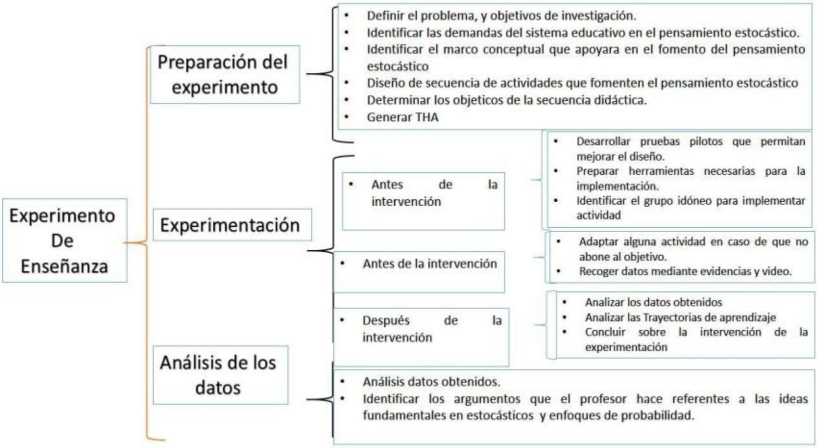
Se hizo un experimento de enseñanza, en donde el investigador fue el profesor auxiliar de una clase de Metodología de la Enseñanza de la Matemática II, en la cual se fomenta la reflexión sobre los elementos fundamentales en proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de vivenciar diversas actividades matemáticas sustentadas en perspectivas teórica-metodológica, a la vez que se elaboraron o rediseñaron diseños para un saber matemático concreto por parte de los estudiantes en donde usarán algún sustento teórico-metodológico. Esta unidad de aprendizaje corresponde al área de Matemática Educativa del programa educativo de licenciatura de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

La actividad matemática que se exploró con los profesores en formación inicial (PFI), fue diseñada bajo el sustento de ideas fundamentales y enfoques de probabilidad de tal manera que se buscaba identificar si los PFI tienen arraigadas algunas ideas fundamentales o enfoques de probabilidad que permitieran resolver las actividades y además que les permitiera generar su propuesta de diseño

Se realizó un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) y se siguieron tres fases que se sintetizan en la figura siguiente.

Figura: 2

Síntesis de experimento de enseñanza



Fuente: Elaboración propia con apoyo en la información tomada de Molina, Castro, Molina y Castro (2011)

Esta metodología de investigación, tiene como estructura para su funcionamiento, una serie de análisis, mismos que se llevan a cabo en fases. Los análisis que corresponden a los elementos teóricos y metodológicos que sustentan la actividad matemática, así como las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que se plantean con respecto a la actividad diseñada se hacen durante la segunda etapa, y (puesta en escena), implementa estrategias, las estrategias que permiten tomar acciones durante el experimento de enseñanza. Y finalmente Por otro lado el análisis sobre la recolección de datos e información recabada durante el estudio que permite realizar observaciones más profundas, es el que se realiza después del experimento de enseñanza, para plantear posibles opciones al problema identificado en el estudio.

Para el desarrollo de la actividad se hizo uso de sesiones síncronas por medio de la plataforma Google Meet, la cual constó de un tiempo total de dos horas cuarenta y cuatro minutos, para poder llevar a cabo la actividad se hizo uso de tres documentos (un documento editable en línea de la primera actividad, un documento Word para desarrollo de la actividad completa y un documento en Excel, tablero de la carrera de caballos con dados) cargados en el Classroom de la unidad de aprendizaje, junto a estos documento también se enlistaron las reglas del juego, que detona la actividad matemática diseñada, y se proporcionó un enlace del simulador del lanzamiento de dados que permitió desarrollar una tarea de la actividad.

Actividad matemática para identificar ideas fundamentales de estocásticos y enfoques de probabilidad

La actividad matemática que se diseñó tiene un proceso que permite partir de lo informal a lo formal, considerando tres enfoques de probabilidad: enfoque intuitivo (punto de partida), enfoque frecuencial (desarrollo de la actividad, de lo intuitivo a lo formal) enfoque clásico (permite hacer el cálculo de probabilidad del evento), el cierre de la actividad permite hacer un contraste entre los 3 enfoques trabajados. Aunado la actividad se sustentó de las ideas fundamentales enumeradas por Heitele (1975).

Momento 1. Generación de primeras predicciones:

Objetivo: Permitir que los participantes hagan uso del enfoque intuitivo, mediante predicciones con respecto a sus experiencias vividas en actividades anteriores a la que se pone en escena.

El papel del participante: trabaja de forma individual y genera predicciones basadas en sus experiencias y hace uso de expresiones comunes.

El papel del profesor: provoca que los alumnos generen predicciones, para identificar su enfoque probabilístico

Tabla 1

<table>
<tr><th rowspan="2">Instrucción</th><th colspan="2">Estructura y expectativa de la actividad matemática</th></tr>
<tr><th>Actividad</th><th>THA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Escribe el número que tiene el caballo al que le apuestas.</td><td>1.1. ¿A qué caballo le apuestas?
1.2. ¿Por qué eliges estos números de caballos?
1.3. ¿Por qué no elegiste el caballo X?
Nota: Se espera que el número X sea el cero</td><td>• Hace uso de su creencia sobre una situación de azar para la toma de decisiones, basados en gustos o números de la suerte o mala suerte.
• El cero es considerado como un suceso poco posible o poco favorable. Omite al cero porque no está resaltado con color en el tablero virtual.
• Usa expresiones informales como; creo que este número es de buena suerte, esté es mi número favorito, me gustan esos números o eran los que quedaba.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enfoque de probabilidad e Ideas fundamentales:
Enfoque intuitivo:
La característica principal de este enfoque es que el participante hace uso de sus creencias o experiencias para predecir resultados, hace uso de argumentos informales.
Idea fundamental: Normando las expresiones de nuestra creencia, esta idea tiene relación con pasar de expresiones informales a formales.</td></tr>
</table>

Momento 2. Primera etapa de exploración y análisis de las frecuencias

Objetivo: que el alumno genere nuevas predicciones partiendo de un número pequeño de lanzamientos, haciendo uso del enfoque frecuencial, y la idea fundamental normando las expresiones de nuestra creencia, también identifica eventos no equiprobables y eventos nulos.

El papel del participante: realizar 20 simulaciones de lanzamientos, argumentar que es lo que observan y contrastar sus primeras predicciones con las que tienen después de llevar a cabo la actividad.

El papel del profesor: provoca en los alumnos argumentos más fundamentados basados en sus resultados, buscando que el alumno haga uso de términos propios de probabilidad.

Tabla: 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Instrucción</th><th colspan="2">Estructura y expectativa de la actividad matemática</th></tr>
<tr><th>Actividad</th><th>THA</th></tr>
<tr><td rowspan="3">2. Con las reglas del juego, el tablero del archivo Excel y sus dados virtua-les, realiza 20 lan-zamientos y regis-tra los resultados en tu tablero, y observa el avance del caballo.</td><td>2.1. ¿Qué caballo va ganando a los 10 lanzamientos?</td><td>• Genera argumentos sobre las tendencias de los resultados, perciben las frecuencias y por tanto se acercan a la probabilidad frecuencial. Sin embargo, aún no miden las frecuencias para poder hablar de probabilidades, incluso no hacen explícito el espacio muestral de su sucesos.
• Continúa usando expresiones como; creo que tiene más posibilidad..., supongo que seguir así ganaría..., es posible que gane el caballo.., etc.</td></tr>
<tr><td>2.2. ¿Qué caballo ganó?
2.3. ¿De tus apuestas en la actividad 1, cuál te hizo ganar? ¿Por qué?</td><td>• Percibe que algunos caballos tienen más posibilidad de avanzar que otros, es decir, se trata de una situación no equiprobable, aunque esto no se diga en estos términos se percibe. Por ejemplo, cuando se dice el 0, -1 y 1 tiene más posibilidad de avanzar o que 6 y el -6 no avanzarán por que no salen como resultado de la resta de los dados.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enfoque de probabilidad e Ideas fundamentales:
Enfoque frecuencial: aunque aún no se han realizado un número alto de lanzamientos para poder hacer su uso, ya se empieza a desarrollarlo.
Normando las expresiones de nuestra creencia: esta idea fundamental estará presente en todas las actividades.
Ley de los grandes números: aunque aún no se han realizados muchos lanzamientos ya se empieza el desarrollo de esta idea fundamental.</td></tr>
</table>

Momento 3. Experimentación con un número mayor de eventos

Objetivo: que el alumno experimente un número mayor de lanzamientos y realice un análisis sustentado en por que se han manifestado los resultados de esta forma. Del mismo modo el alumno puede generar y manifestar el espacio muestra mediante el uso de tabla de datos.

El papel del participante: realizar el espacio muestral, considerando la idea fundamental campo de probabilidad, genera argumentos basados en su experiencia con respecto a la actividad puede generar predicciones con respecto a lo frecuencial que se manifiesta en los eventos realizados.

El papel del profesor: provoca en los alumnos que se distinga lo frecuencial con respecto a la actividad, promueve expresiones propias de probabilidad del tipo: es más probable que…, tiene mayor probabilidad de resultar…, con respecto a lo observado el evento nulo es…, etc.

Tabla 3.

Instrucción	Estructura y expectativa de la actividad matemática	
	Actividad	**THA**
3. Con base al análisis de la información	2.5 En la siguiente tabla anota los resultados de 50 lanzamientos. El resultado se requiere anotar de acuerdo a como se presente al lanzar los dados. 3.1. ¿Hasta ahora cuál es el caballo que ha avanzado más? ¿Por qué? 3.2. ¿Cambiaron los resultados respecto a los primeros 20 lanzamientos? ¿Por qué crees que se te presentaron estos resultados? 3.3. ¿Qué observas con respecto al caballo que se asignó con la X? 3.4. ¿Qué número de caballo no ha tenido avance? ¿Por qué? 3.5. ¿De acuerdo al experimento realizado a qué caballo le apostarías? ¿Por qué?	• Genera el espacio muestral con el uso de la tabla de registro, con esto se logra visualizar el número total de eventos ocurridos y sus frecuencias, lo cual puede motivar al cálculo de las probabilidades de los eventos ocurridos. • Se percibe lo frecuencial, mediante la estimación de su frecuencia relativa al número de repeticiones del suceso en la situación azarosa, para ello se requiere del cálculo de las probabilidades. Del mismo modo, si se comparten los datos en plenaria se puede percibir que a mayor cantidad de repeticiones de la sucesión se percibe una tendencia en las probabilidades (se puede aprovechar para hablar de la ley de los grandes números). • Hay argumentos como: A mayor repeticiones el número 0 es más frecuente, o el 1, y el -1. Los números que están más cercanos al cero son los que tienen más posibilidad de ganar.. Tiene mayor posibilidad de resultar. Es el único que ganará. Con respecto a la ley de los grandes números puede ganar el 0. • Notarán que el cálculo de las probabilidades en una situación azarosa permitirá matematizar los sucesos. Y con ello podrían tomar decisiones tomando las probabilidades, porque identificarán qué casos son más probables que otros y que casos son imposibles.
	Enfoque de probabilidad e Ideas fundamentales ***Enfoque frecuencial:*** Al finalizar esta serie de lanzamientos el participante tendrá la oportunidad de predecir los posibles resultados tal como lo menciona el enfoque frecuencial, en esta etapa del experimento el alumno ha realizado por lo menos 70 lanzamientos. ***Campo de probabilidad:*** Con el proceso de realizar registro de datos el alumno tendrá la oportunidad de generar un espacio muestral. ***Normando las expresiones*:** Se manifiesta en toda la actividad el alumno hace uso de Argumentos con más fundamento. ***Equidistribución y Simetría:*** Situación equiprobable y simetría de los resultados, el alumno puede lograr identificar esta idea fundamental.	

Momento 4. Unión de datos

Objetivo: que los participantes, analicen e interpreten los datos obtenidos en una gráfica que permita observar la no Equidistribución y la simetría de los resultados, y de esta forma poder predecir cuáles serán los resultados de la actividad con respecto a la idea fundamental la ley de los grandes números.

El papel del alumno: organizarse en equipo para poder organizar los datos y tomen las decisiones precisas para poder generar la gráfica que les permita alcanzar el objetivo establecido.

El papel del profesor: provoca en los alumnos argumenten las razones del uso de gráficas en la actividad, promover diferentes tipos de gráficas, enfocando su atención en gráfica de barras que permitan observar el comportamiento de los datos.

Tabla 4.

<table>
<tr><th rowspan="2">Instrucción</th><th colspan="2">Estructura y expectativa de la actividad matemática</th></tr>
<tr><th>Actividad</th><th>THA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">4. Uniendo los datos</td><td>4.1. ¿Es posible organizar los datos obtenidos hasta ahora? ¿Cómo organizarían la información de todo el grupo?
4.2. ¿Qué postulan que sucede cuando se realiza un número de lanzamiento mayor? ¿Por qué?</td><td>• Genera tablas de datos y/o gráficas como instrumentos de organización y visualización de probabilidades de todos los eventos posibles.
• Discute sobre cómo organizar la información en tablas generales
• Discute sobre qué gráficas permiten visualizar mejor los sucesos y sus frecuencias relativas.
• Conjeture basado en las frecuencias relativas a la ley de los grandes números.
• Definan los casos equiprobables, nulos y el caso más probable.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enfoque de probabilidad e Ideas fundamentales
Enfoque frecuencial: El participante podrá suponer los posibles resultados después de observar la frecuencia relativa con respecto al número de lanzamientos.
Equidistribución y simetría: si el alumno hace uso de la gráfica de barras podrá apreciar la no Equidistribución de la situación y la simetría que se genera con los resultados obtenidos hasta este número de eventos.</td></tr>
</table>

Momento 5. Cálculo de probabilidad y contraste entre los enfoques de probabilidad

Objetivo: que los alumnos, completen y calculen la probabilidad de cada uno de los eventos posibles, y de esta formas contrastar la información manifestada en los diferentes enfoques de probabilidad y comprueben que la tendencia de resultados en el enfoque frecuencial es la misma que se obtiene calculando la probabilidad mediante el proceso del enfoque clásico.

El papel del alumno: completar la tabla de los casos posibles de la actividad, calcular la probabilidad de cada uno de los eventos y generen una gráfica con los resultados obtenidos en este cálculo, contrastar la información del enfoque frecuencial y del enfoque clásico.

El papel del profesor: vigilar que el llenado de la tabla sea correcto, apoyar en el cálculo probabilidad y en la medida de la misma, en caso de que el alumno no conozca la forma en que se mide la probabilidad, el profesor deberá ofrecer esta información, promover el uso de adecuado de términos propios de probabilidad expresiones como del tipo, la probabilidad de que resulte cero es 6 de 36, o 0.16.

Tabla 5.

Instrucción	Estructura y expectativa de la actividad matemática	
	Actividad	THA
5. Completa de manera independiente la siguiente tabla. Considera que los dados rojos son números negativos y dados azules números positivos, y analiza todas las probabilidades que se obtienen al usar los dados.	5.1 ¿Con respecto a la tabla cuál es el resultado con mayor probabilidad? 5.2 ¿Cuál es la probabilidad que tiene el número 0? 5.3 describe de forma gráfica todas las probabilidades de la tabla anterior.	Analiza los casos probables en la situación, sin necesidad de hacer la experimentación, y contrastar con su tabla de registros de frecuencias relativas. Visualizan las distribuciones de las probabilidades tanto en los datos numéricos como en la gráfica, se espera que la gráfica de barras sea funcional para este objetivo.
	Enfoque de probabilidad e Ideas fundamentales ***Enfoque clásico:*** el participante lleva a cabo el cálculo de probabilidad sin necesidad de experimentar. Calcular el total de los posibles resultados entre los casos favorables. ***Enfoque frecuencial:*** el participante, contrasta la información obtenida con el experimento desarrollado, y el cálculo de probabilidad con las reglas del enfoque clásico. ***Enfoque intuitivo:*** identificar cómo influyen las creencias e información en las predicciones de eventos. ***Equidistribución y Simetría:*** con el llenado del campo de probabilidad el participante identifica la no Equidistribución y la simetría del total de eventos, esa idea es fortalecida con el gráfico que se obtiene al calcular la probabilidad de cada uno de los posibles resultados. ***Normando las expresiones de nuestra creencia:*** al cerrar este conjunto de actividades el participante ya debe manejar conceptos precisos sobre probabilidad.	

Resultados

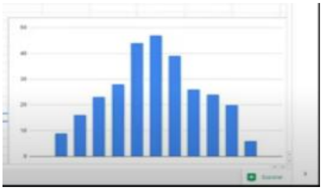
Análisis de los datos obtenidos de la exploración

Tabla 6.

Argumentos de los profesores en formación

Argumentos de los profesores en formación	Argumentos de ideas fundamentales	Argumentos de enfoques de probabilidad
Generación de primeras predicciones		
¿Por qué hiciste estas predicciones? J… Este nomas al azar de la suerte supongo W: creo que es más fácil que salgan R: bueno uno de ellos es porque es mi número favorito y los otros pues por azar. E: bueno es que ya eran los únicos que quedaban. **¿Por qué no elegir al cero?** W.- Creo que va a ser más difícil que haya un resultado cero entre los números. J: no creo que los dados coincidan para que del mismo número y resulte cero, no creo que coincidan. A: yo profe por qué no lo vi, pero creo que sí puede tener una pequeña posibilidad.	Normando las expresiones de nuestra creencia.	Enfoque intuitivo (argumentos basado en sus creencias)

Actividad 2 (analizando las frecuencias)		
¿Después de experimentar cambiarías tus predicciones? J: Mmmmm no lo sé, es que como que al final estuvo cayendo mucho el cero, pero no creo que apostaría al -1. W: Pues lo que veo aquí el que quedó en segundo lugar es el -1. W: Si también entre el cero y el menos 1 A: Los que están cerca del cero, bueno conmigo ganó el cero, no sé todavía, porque en el empate iban 3, 1, 0 y -2, pero por ejemplo en los primeros 10 lanzamientos, fueron 3, 1 y -2 y todavía no salía 0 y después de los 10 lanzamientos empezó a salir el 0, entonces no sé qué atribuirle a que… E: disculpe, igual que la compañera A los que están más cerca del cero que es (-1,0 y 1) igual un poquito quien se acerca más es el -2, bueno en mi tabla	Simetría de resultados, (observan eventos igualmente posibles y posibilidad nula)	Enfoque Frecuencial, los alumnos perciben la tendencia de resultados y sugieren que de acuerdo a lo que se manifiesta el número con mayor probabilidad son los números que están cerca del cero.
Organización de la información (uniendo los datos)		

J.-Pues en base a los datos que cada quien tuvo aquí se ve que él a la mayoría se vio que los caballos que más avanzaron fueron el cero el uno y el menos uno ya en el total se ve que es el cero que avanza más o. JA.-Aunque si quieres la oportunidad de apostarle un solo caballo A cuál le apostaría .Con la suma de los datos en total. J.- Pues basándome en los En el total sería al cero pues  qué es el que más avanzó. W. Pues lo que yo apostaría es al cero dado lo que yo veo es que tiene 12 posibles resultados de que caiga el cero y para uno ya disminuiría no sé si serían 10 resultados o 11 pero así conforme el número sea más grande va a ir disminuyendo y Por esa razón Y después de un proceso de varios Resultados ya no va a ser lo mismo Y pues lo que veo que como 0 tiene 12 Números que pueden hacer ceros Pues es el que tiene mayor ventaja. I: yo creo que el cero porque ya hice mi gráfica de todos los números y creo que es el que va a ganar. E.- Pues igual concuerdo con mis compañeros que sí es el cero el que va a tener más posibilidades de ganar ya uniendo todos los datos que tuvo cada uno. E: se ve más claro que el 0 tiene más posibilidades de salir ganador, porque avanza más que los demás.	Medida de probabilidad: aunque no se ha calculado la probabilidad de cada uno de los resultados, los participante hacen mención que el caballo avanzara más que el resto de los caballos Ley de los grandes números: los participantes deciden cambiar de apuestas, después de haber unido todos los resultados en la experimentación. Simetría de resultados: el participante hace alusión a los casos posibles, y trata de asignar probabilidades a cada combinación, aunque no determina su postura hacia el campo muestral.	Enfoque frecuencial: por la frecuencia de resultados que se han manifestado a favor del caballo con el número 0. Los participantes determinan cambiar su apuesta al número 0.

Espacio muestral y cálculo de probabilidad		
W: el cero es el que tiene mayor probabilidad de resultar, su probabilidad es de seis treintaiseisavos. 	Normando las expresiones de nuestra creencia: el participante usa la expresión “seis treintaiseisavos”, permitiendo observar que la información sobre medida de probabilidad la identifica como fraccionaría. Simetría y espacio muestral: los alumnos evidencian comprensión de la simetría de resultados y organización del espacio muestral	Enfoque Clásico: los participantes realizan el cálculo de probabilidad, y determinan que el caballo con más probabilidad de resultar es el 0.

Conclusiones

En el análisis de los datos recabados en el experimento de enseñanza, es posible identificar que los profesores en formación inicial cuenta con un desarrollo de ideas fundamentales de forma empírica, es decir hacen uso de ellas pero no conceptualizan una idea fundamental, por otro lado lo que respecta a los enfoques de probabilidad los alumnos asocian esta información con distintas probabilidades, es decir no reconocen como tal los distintos enfoques.

Cabe mencionar que los profesores que vivenciaron la actividad que se puso en escena, identificaron que hacen uso de ideas fundamentales durante sus actividades de probabilidad y estadísticas, y además que también conocen los enfoques de probabilidad, pero nunca los aplicaron como tal, sin embargo pongo en manifiesto que aunque los alumnos vivenciaron esta actividad de probabilidad, no parece ser suficiente para cubrir los temas exigidos por el sistema educativo mexicano, parece conveniente generar espacios que permitan fomentar el pensamiento estocástico en los profesores en formación, para poder de esta forma enriquecer las herramientas y conocimientos para su desempeño docente.

Además de fomentar el pensamiento estocástico, es necesario permitir al profesor en formación generar actividades de práctica y reflexión docente para poder lograr de esta forma obtener experiencias en espacios reales o similares a los que se enfrentarán en su práctica docente.

Referencias bibliográficas

Aké, L. P., y López-Mojica, J. M. (2020). Naturaleza de las tareas profesionales en la formación de profesores de matemáticas. *Páginas De Educación*, 13(1), 58-81. https://doi.org/10.22235/pe.v13i1.1919

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *8*(3), 247-263.

Burbano, V., & Valdivieso, M. (2014). Conocimientos del profesor para la enseñanza de la probabilidad en la educación media colombiana. En L. Andrade (Ed.)

Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica. La enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística. Bogotá, Colombia; Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Cuevas, H., & Ramírez, G. (2018). Desempeño en estocástica entre profesores de educación secundaria: un estudio exploratorio en dos regiones de Costa Rica y México. *Educación matemática*, *30*(1), 93-132.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics,* *6*(2), 187-205. Doi: https://doi.org/10.1007/BF00302543.

López Mokica, J.M. & Aké, L.P. (2019). Argumentos intuitivos de futuros profesores: Una experiencia con probabilidad, *REVEMAT 14 Edição Especial Educação Estadistica*, 1-18 DOI: http://doi.org/105007/1981-1322.2019.e61978.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29*(1), 75-88.

Sáez, G., Campos, D., Suckel, M. & Rodríguez, G. (2019). Práctica Colegiada en la Formación Inicial Docente y Construcción del saber Pedagógico. *RMIE*, 24(82), 811-831.

Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación matemática*, *21*(2), 39-77.

Vaillant, D., & Manso, J. (2012). Tendencias en la formación inicial docente. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 3(18), 11-30.

Vasquez, C. & Alsina, A. (2019). Diseño, Construcción y Validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de Educación Primaria, *REVEMAT 14 Edição Especial Educação Estadistica*, 1-20 DOI: http://doi.org/105007/1981-1322.2019.e62343.

Versub, L. (2007). La formacio□n y el desarrollo profesional docente frente a los nuevos desafi□os de la escolaridad. *Revista de curri□culum y formacio□n de profesorado,* 11(1), 1-24.

La probabilidad condicional mediante la simulación de un modelo de urna: propuesta didáctica para estudiantes de Nivel Medio Superior [11]

Fabiola Juárez Morales – Yuridia Arellano García

Se presentan avances de una investigación cualitativa, cuyo objetivo es diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad condicional e independencia de sucesos a través de las ideas fundamentales de estocásticos y en la simulación de un modelo de urna. La propuesta incluye el diseño y programación una aplicación Web que simula el juego de la tómbola (SDT), con la intención acelerar el proceso de experimentación y con esto los estudiantes construyan intuiciones secundarias de probabilidad de forma efectiva. El diseño de las actividades se basan los tres ejes rectores de Ojeda (1994): el epistemológico, el cognitivo y el social. La investigación se fundamenta en la Investigación-Acción educativa, hasta el momento se han ejecutado tres ciclos con el propósito de mejorar las actividades y el SDT.

Palabras clave: Ideas fundamentales, probabilidad condicional, independencia, simulación, propuesta didáctica.

Introducción

Frecuentemente a niños y adultos se nos presentan situaciones de tipo aleatorio, donde la mayoría de las veces al elegir una opción se termina usando intuiciones primarias, lo cual nos reduce las posibilidades de tomar una decisión que sea basada en datos y de forma consciente. Es por esto que

---

[11] Juárez Morales, F. & Arellano García, Y. (2022). La probabilidad condicional mediante la simulación de un modelo de urna: propuesta didáctica para estudiantes de Nivel Medio Superior. En N. Marquina, M. Ferrari & M. Méndez, (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 3* (pp. 135-148). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México

el estudio de los temas de probabilidad es muy importante (Batanero, 2000; Herrera, 2004; Ojeda, 1995) ya que es útil para la vida en el desarrollo personal o profesional. Para comprender, analizar y procesar información, esas situaciones demandan de los sujetos competencias matemáticas asociadas al desarrollo de un pensamiento estocástico (SEP, 2019).

La enseñanza de la probabilidad inicia formalmente en 5° y 6° de primaria (SEP, 2017a) al identificar al identificar situaciones en las que interviene el azar y determinar los resultados posibles de un experimento aleatorio. Posteriormente, en secundaria se estudia la probabilidad frecuencial, la probabilidad teórica y los eventos mutuamente excluyentes. En bachillerato se espera que los estudiantes desarrollen habilidades para identificar fenómenos aleatorios que involucran dos o más variables (UAGro, 2010), la probabilidad conjunta y condicional, eventos independientes y el teorema de Bayes (SEP, 2017b).

En tanto, la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad condicional es muy importante, ya que como profesionales o en la vida cotidiana debemos tomar decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre, que se basan en el razonamiento condicional (Batanero et al., 2014). También permite cambiar el grado de creencia en eventos aleatorios cuando hay nueva información disponible. El comprender y razonar de forma correcta esta idea estocástica, facilita en gran medida el estudio y comprensión de la probabilidad Bayesiana (Batanero et al., 2010).

A pesar de que en los programas de estudios se establece la enseñanza de la probabilidad, en la práctica es muy difícil que estos temas se aborden, esto debido a que estos contenidos generalmente son delegados hasta el final de los libros de texto y como consecuencia, ya sea por falta de tiempo o por el poco interés de los profesores no son atendidos o solo se llegan a abordar superficialmente incluyendo explicaciones muy formalizadas (Batanero, 2000). En consecuencia, los estudiantes van avanzado en los niveles educativos, careciendo de los conocimientos básicos de la probabilidad, y cuando llegan a niveles superiores presentan dificultades en la comprensión de conceptos más difíciles.

En diversas investigaciones se ha reportado que los estudiantes de bachillerato presentan errores de razonamiento y llegan a confundir la probabilidad condicional con la conjunta (Huerta et al., 2017; Ojeda, 1995), no identifican cuando son eventos dependientes o independientes (Megías et al., 2018) y otros sesgos probabilísticos (De la Fuente & Díaz, 2005). Por esto se recomienda dejar de lado la enseñanza tradicional e incluir diversas situaciones azarosas como urnas, tómbolas y dados, llevar a cabo simulaciones dinámicas implementando la tecnología y desarrollar situaciones didácticas implementando las ideas fundamentales, ya que su principal objetivo es desarrollar el pensamiento estocástico (Lonngi y Ojeda, 2011; Lopez y Ojeda, 2014).

En el estudio de la probabilidad frecuencial la experimentación es indispensable y para la comprensión *de la ley de los grandes números* se necesita que un experimento aleatorio se repita un gran número de veces, lo cual no es posible por el limitado tiempo de una clase de bachillerato. Por esto, la simulación por ordenador como se considera una excelente herramienta didáctica, ya que permite realizar un mayor número de ejecuciones del experimento contribuyendo a subsanar la falta de tiempo (Sada, 2011), a mejorar las intuiciones probabilísticas de los estudiantes (Serrano et al., 2009), en la comprensión de conceptos difíciles (Barragués y Guisasola, 2007; Mills, 2002; Osorio et al., 2013) y crean situaciones motivadoras potenciando el entusiasmo y la particiapción el clases (Contreras et al., 2019).

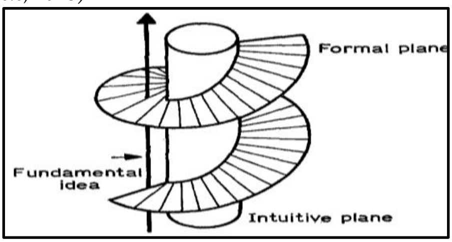
En consecuencia, el objetivo de esta investigación es diseñar una propuesta didáctica dirigida a estudiantes de Nivel Medio Superior para el estudio de la probabilidad condicional e independencia de sucesos, basada en las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) y en la simulación de un modelo de urna.

Marco teórico

Para el desarrollo de la investigación se retoma la propuesta teórica de Ojeda (1994) que distingue tres ejes rectores para la enseñanza de estocásticos: el epistemológico, el cognitivo y el social. En el **eje epistemológico** se toma como referencia a Heitele (1975) quien propone 10 ideas fundamentales para el desarrollo del pensamiento estocástico: 1) Medida de la probabilidad, 2) espacio muestra, 3) la regla de la suma,4) la regla del producto e independencia, 5) equidistribución y simetría, 6) combinatoria, 7) modelo de urna y simulación, 8) variable aleatoria, 9) ley de los grandes números y 10) muestra.

Para Heitele, las ideas fundamentales son aquellas que "*proporciona al individuo, en cada etapa de su desarrollo, modelos explicativos tan eficientes como sea posible y que difieren en los niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración*" (p. 188). Las ideas fundamentales deben organizarse sobre un currículo en espiral (Figura 1) partiendo de un plano intuitivo hasta llegar a un plano formal, lo cual conduce a cambiar el estudio de temas o definiciones formales desde un principio por el de ideas o nociones que han de asociarse para su comprensión de manera gradual y continua.

Figura 1
Currículo en espiral (Heitele, 1975)



Nota: Imagen tomada de Heitele (1975 p. 188)

Intuitivamente se puede decir que la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. En un plano más formal, se define con la expresión: $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B), siempre\ que\ P(B) > 0.$ La probabilidad condicionada está relacionada con la independencia, puede decirse que A y B son independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, es decir dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionar por el otro.

Además, se retoma la propuesta de López-Mojica y Aké (2019) quienes consideran que es necesario enseñar los temas de probabilidad partiendo de un *enfoque intuitivo*, posteriormente trabajar simultáneamente los *enfoques frecuencial y clásico*, para que a partir de estos tres enfoques se pueda llegar a un *enfoque axiomático*. El enfoque intuitivo de la probabilidad se ha interpretado como el grado de creencia de una persona en la ocurrencia de los posibles resultados de una situación azarosa. El enfoque clásico se interpreta como la razón entre el número de casos favorables con el número total de casos posibles, siempre y cuando éstos sean igualmente posibles. Se tiene que n representa el número de casos favorables del evento A, N es el número total de casos posibles, por lo tanto: $P(A) = \frac{n}{N}$. El Enfoque frecuencial se interpreta como la estimación de la probabilidad de un evento con base en su frecuencia relativa $(\frac{nA}{n})$ de ocurrencia en una secuencia grande de repeticiones del fenómeno aleatorio.

El **eje cognitivo** se basa en las ideas de Fischbein (1975) quien otorga gran importancia a la intuición en el desarrollo del pensamiento probabilístico. Según este autor, una intuición es aquel conocimiento que se presenta de manera espontánea después de haber realizado repetidamente alguna acción determinada y pueden ser clasificadas en intuiciones primarias que se desarrollar como consecuencia de la experiencia personal del individuo y secundarias que se desarrollan a partir de la instrucción y entrenamiento intelectual sistemático y prolongado.

En el **eje social** se analiza el papel de la enseñanza de estocásticos en cuanto a la relación entre la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático y su significado socialmente constituido en la interacción en el aula (Steinbring, 2005). Se resalta el papel de la enseñanza progresiva del conocimiento estocástico, el cual requiere de la observancia del triángulo epistemológico el cual consta de tres componentes: Objeto, aquello que es producto de la actividad intelectual del sujeto. Signo, la representación de esa abstracción. Concepto, lo que apela a la descripción especifica de esa cosa y va de nociones, a ideas, a conceptos e interrelación constante con el objeto y el signo.

Metodología

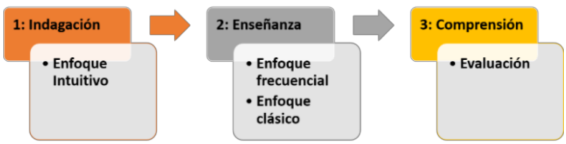
La investigación es cualitativa y se lleva a cabo mediante la metodología de Investigación-Acción, la cual consta de tres etapas: diseño, desarrollo e informe final. En este momento nos encontramos en la etapa de desarrollo, en la cual llevamos a cabo un proceso de tres cíclicos de planeación, actuación, observación y reflexión, con el propósito principal de diseñar una propuesta didáctica que incluye una secuencia de actividades basada en las ideas fundamentales de estocásticos y en la simulación de un modelo de urna (el juego de la tómbola). Para la fase de experimentación se diseña y programa el SDT en versión Web, como una herramienta didáctica complementaria para que los estudiantes lleven a cabo simulaciones dinámicas que les ayuden a construir intuiciones secundarias de probabilidad condicional y de las ideas fundamentales.

Hasta el momento se han diseñado 6 actividades que parten del juego de la tómbola, en este proyecto la experimentación a través de la simulación es importante para que el alumno observe y pueda reflexionar acerca de los resultados que se obtienen y con esto pueda pasar de un pensamiento determinista a uno probabilístico. Con el juego de la tómbola los estudiantes podrán realizar extracciones sucesivas con reposición y sin reposición para dos extracciones, relacionando así la probabilidad condicional con independencia de sucesos con su contexto cotidiano.

El juego de la tómbola consiste en introducir canicas de diferentes colores (rojo, azul, amarillo y verde) y cantidades, al inicio del juego se informa a los participantes el número de canicas y las cantidades (que van a variar en cada jugada). Se extraerán 2 canicas consecutivamente (con o sin reposición), los participantes deben inscribirse en el concurso y apostar al color de canica que creen saldrá en la primera y posteriormente en la segunda extracción, si adivinan la primera se le devuelve la apuesta y si adivina la segunda gana el doble de su apuesta. El costo del boleto es de $30.00 y solo se venderá un boleto por cada resultado posible.

La secuencia de actividades se distribuye en tres fases tres fases correspondientes con los enfoques de la probabilidad (Figura 2). La **fase 1** es de indagación, donde se diseñaron dos actividades orientadas al enfoque intuitivo y con las que se pretende observar las nociones de las ideas fundamentales de probabilidad con las que cuentan los estudiantes. La **fase 2** es de enseñanza, se retoma el enfoque frecuencial y clásico, para el enfoque frecuencial se diseñaron dos actividades donde se realizarán las simulaciones con las que se busca promover las ideas fundamentales de medida de la probabilidad, variable aleatoria, espacio muestra, modelo de urna y simulación y ley de los grandes números. Para el enfoque clásico se diseñó una actividad con la que se pretende promover las ideas fundamentales de **medida de la probabilidad, variable aleatoria, espacio muestra, equidistribución y simetría y combinatoria.** La **fase 3** es de comprensión, se diseñó una actividad para evaluar la comprensión de las ideas fundamentales después de su enseñanza.

Figura 2
Fases de la secuencia didáctica



Fuente: Propuesta readaptada de la estructura de secuencia didáctica

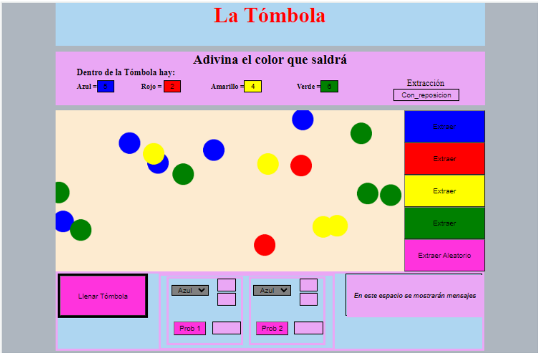
(López-Mojica y Aké, 2019)

El SDT

El SDT fue rediseñado pasando de una aplicación de escritorio a una versión Web (Figura 3) programado en HTML, PHP, Javascript y CSS, con la que los estudiantes podrán interactuar de forma dinámica desde sus celulares, tabletas o computadoras.

Figura 3

SDT versión Web

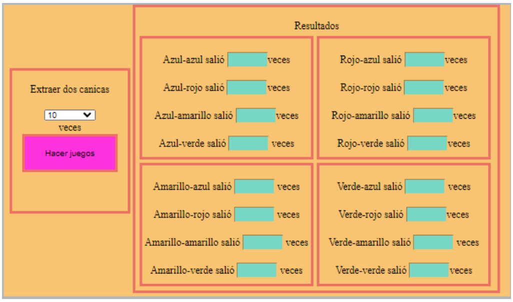


Con el SDT los estudiantes podrán realizar extracciones de una o varias canicas (rojo, amarillo, azul y verde). En cada juego, se pueden realizar extracciones al azar o extraer un color específico. Se extrae primero 1 luego 2 bolas consecutivamente, el estudiante debe en un primer momento “adivinar” el color que saldrá en la primera y en la segunda extracción sabiendo el primer resultado. Los estudiantes pueden calcular la probabilidad de la primera y segunda extracción, en caso de equivocarse se les genera un mensaje con una retroalimentación y se les permite intentarlo las veces necesarias. Además, la aplicación está programada para realizar juegos (de una o dos extracciones) de uno en uno o realizar juegos simultáneos de 10 hasta 1000000 de veces, presentando los resultados en tablas (Figura 4).

Cabe resaltar que la aplicación fue diseñada especialmente para ser probada en este proyecto, realizar las mejoras necesarias y así poder implementarla en trabajos futuros.

Figura 4

SDT versión Web extracciones aleatorias múltiples de 2 canicas



Fuente: Elaboración propia

Las actividades

En la actividad 1 se inicia explicando a los estudiantes en que consiste el juego de la tómbola y se plantea una situación de equiprobabilidad con independencia de sucesos, donde deben poner en juego sus conocimientos previos y adivinar los colores de canicas que creen que saldrá en la primera y segunda extracción. En la actividad 2 se modifica la tómbola para abordar una situación de no equiprobabilidad con dependencia e independencia de sucesos, de igual forma se les pide a los estudiantes que adivinen los colores que creen que saldrán en la primera y segunda extracción desde esta nueva situación.

En la actividad 3 se inicia la fase de experimentación (enfoque frecuencial) y se organiza a los estudiantes en equipos de tres integrantes. Se les plantea una situación de no equiprobabilidad con independencia de sucesos y se les pide que apuesten a una combinación de colores. Posteriormente, por medio del SDT realizan 10 juegos individuales y anotan los resultados en una tabla de Excel. A continuación, se les pide realizar 100, 1000, 10000, 100000 y 1000000 de juegos y anotar los resultados obtenidos en la tabla de Excel y obtengan sus gráficos de barra. Finalmente, se les pide que observen e interpreten los gráficos para que observen los eventos con mayor probabilidad de suceder y a partir de esto replantear su decisión inicial. En la actividad 4 se plantea una situación de no equiprobabilidad con dependencia de sucesos y se realiza el mismo procedimiento que en la actividad 3.

En la actividad 5 se trabaja el enfoque clásico desde una situación de no equiprobabilidad con dependencia e independencia de sucesos. Se les pide a los estudiantes obtener la probabilidad clásica para cada resultado posible, implementando diagramas de árbol o tablas de doble entrada. En esta actividad se trabaja directamente con la probabilidad conjunta, condicional, independencia de sucesos y la ley de los grandes números.

En la actividad 6 se aplica un cuestionario a modo de evaluación, el cuestionario incluye problemas que involucran el juego de la tómbola en diferentes situaciones, con la que buscamos observar las ideas fundamentales aprendidas en las actividades anteriores. Este cuestionario se aplica por medio de Quizizz para que sea más interactivo y dinámico.

Con los 3 ciclos realizados se consiguió mejorar las actividades y el simulador. Se implementará un nuevo ciclo en el cual participarán estudiantes de 2° de bachillerato en una modalidad virtual. Para la recolección de los datos se diseñaron 5 hojas de trabajo que serán compartidas con los estudiantes por medio de la plataforma Classroom y las sesiones serán videograbadas para su posterior análisis. Las producciones de los estudiantes serán observadas por medio de los criterios de análisis propuestos por Ojeda (2006): Situación de referencia, ideas fundamentales, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos y términos empleados.

Conclusiones

Se espera que al poner en marcha esta propuesta didáctica, los estudiantes puedan pasar de un pensamiento determinista a uno probabilístico y sin duda la teoría que se está implementando nos proporciona las herramientas para poder lograrlo. De igual forma, la aplicación Web que se está desarrollando permitirá a los estudiantes llevar a cabo la experimentación y a partir de esto comprender la probabilidad condicional e independencia de sucesos. Al finalizar la puesta en escena y el análisis de los datos del ciclo 4, estaremos en condiciones de evaluar la propuesta misma, en el estado actual del proyecto no podemos dar conclusiones al respecto.

Referencias bibliográficas

Barragués, J., & Guisasola, J. (2007). Simulación por ordenador de experimentos aleatorios en la enseñanza de la probabilidad. *SIGMA*, *31*, 207–223.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15(2), 13.

Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2014). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 12(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v12i2.1673.

Batanero, C., Díaz, C., & Contreras, J. M. (2010). Teaching Independence and Conditional Probability. *BEIO, Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 26(2), 149–162.

Borragués, J. I., & Gisasola, J. (2007). Simulación por ordenador de experimentos aleatorios en la enseñanza de la probabilidad. *Sigma: Revista de Matemáticas = Matematika Aldizkaria, May 2014*, 207–224.

Contreras García, J. M., Ruiz, K., Ruz Ángel, F., & Molina Portillo, E. (2019). Recursos virtuales para trabajar la probabilidad en Educación Primaria. *Innoeduca. International Journal of Technology and Educational Innovation*, *5*(1), 72-80.

De la Fuente, I., & Díaz, C. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon: Revista de La Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales," 59*(1), 245–260.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, Holland: Reidel.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187–205.

Herrera, E. (2004). Desarrollo del pensamiento estocástico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 735–739.

Huerta, M. P., España, U. D. V., Arnau, J., Pío, C., & Valencia, X. I. I. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *11*(1), 87–106.

Lonngi, P., & Ojeda, A. M. (2011). Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos. Una experiencia con estudiantes sordos: edades 17-26 años. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24, 303–312.

López-Mojica, J. M., & Aké, L. P. (2019). Argumentos intuitivos de futuros profesores: una experiencia con probabilidad. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 14, 1–18. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e61978.

López-Mojica, J. M., & Ojeda, A. M. (2014). Ideas fundamentales de probabilidad y esquema compensatorio visual: experiencia con el síndrome Down. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 905–913.

Megías, A. I., Gea, M. M., & Batanero, C. (2018). Definición y ejemplos de dependencia e independencia de sucesos por estudiantes de bachillerato. *Investigación En Educación Matemática XXI*, *3*(1), 338–347.

Mills, J. D. (2002). Using computer simulation methods to teach statistics: A review of the literature. *Journal of Statistics Education*, *10*(1), 1–20.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional Ojeda 1995. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5, 37–44.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. (Tesis doctoral). King´s College London. UK.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (ed.), *Matemática Educativa, Treinta Años*, 257–281. México: Santillana-Cinvestav.

Osorio, M. A., Suárez, A., & Uribe, C. (2013). Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte*, *38*, 127–142.

Sada, M. (2011). Los applets para la enseñanza de la estadística y probabilidad. *Uno Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *58*(1), 38–48.

SEP. (2017a). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. Recuperado de https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf

SEP. (2017b). *Planes de Estudio de Referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Recuperado de https://www.gob.mx/cms/uploads/-attachment/file/241519/planes-estudio-sems.pdf.

SEP. (2019). *Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. Plan de estudios 2018*. México: SEP.

Serrano, L., Ortiz, J. J., & Rodríguez, J. D. (2009). La simulación como recurso didáctico en la enseñanza de la probabilidad. En Melilla (ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica*. 157-178. España: Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.

UAGro. (2010). *Plan De Estudios Por Competencias 2010 Estadística Cuarto Semestre*. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/1Nkzf_TP9DWG0XkvAv2-iFPUZCUTxCClq3/view.

Actividades del Coloquio

Conferencias

Talleres

Autoeficacia en Matemáticas

Dra. María S. García González

Facultad de Matemáticas

Universidad Autónoma de Guerrero

La autoeficacia refiere a las creencias que el individuo tiene sobre sus propias capacidadades, en Matemática Educativa este constructo ha sido estudiado con el fin de comprender su influencia en el desempeño en matemáticas. En esta charla haré un recorrido por los diferentes niveles escolares para mostrar las creencias que los estudiantes tienen sobre sus capacidades matemáticas.

Semblanza

Doctora en Matemática Educativa por el Cinvestav-IPN. Actualmente es profesora invitada de la Universidad Autónoma de Guerrero, impartiendo cursos en la Facultad de Matemáticas y en el posgrado en Matemática Educativa.

Es presidenta de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, SOMIDEM, A.C. Miembro del comité editorial de la Revista Educación Matemática. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Y miembro del Comité Directivo de PME-NA (North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education).

Explicación didáctica y discurso Matemático escolar: el caso de la variación

Dra. Evelia Reséndiz Balderas

Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades

Universidad Autónoma de Tamaulipas

Se considera el discurso de los profesores de educación superior donde emplean explicaciones didácticas y recursos discursivos para hacer comprensible al estudiante la noción de variación. El objetivo de la investigación, localizar y analizar las formas de introducción y desarrollo de la variación en situaciones de enseñanza. Mediante un enfoque cualitativo-interpretativo, los datos se agruparon en categorías considerando la literatura y el estudio secuencial de situaciones de enseñanza. Se destaca la identificación de una gran diversidad de perspectivas que emplean los profesores cuando explican la noción de variación, pues se atendió la construcción de recursos discursivos y significados. Durante las clases se registraron diferentes tipos de explicación de los docentes en los que se modela la noción de variación.

Semblanza

Doctora y Maestra en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Es Profesora-Investigadora de la Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades de la Universidad Autónoma de Tamaulipas.

Forma parte de la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa y del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Desarrolla la línea de investigación, *Discurso matemático en el aula* habiendo publicado libros, capítulos de libro y artículos de investigación. Actualmente pertenece al Sistema Nacional de Investigadores, nivel I.

Entre cuadriláteros y Q-niveles

Facilitadores
Antonia Itzel Blanco Hurtado - Gema Rubí Moreno Alejandri

Los cuadriláteros son estudiados desde los niveles iniciales de la educación básica del sistema educativo mexicano y se relacionan con numerosos contextos de la vida cotidiana, siendo así de gran relevancia tanto en el ambiente escolar como en lo cotidiano. Es por ello que, en este taller se comparten una serie de actividades propuestas para explorar a los cuadriláteros, sustentadas en los Q-niveles de comprensión de Fujita (2011). El objetivo del taller es que, mediante la reflexión y el análisis de las actividades, se logre coadyuvar a la comprensión de diferentes cuadriláteros.

Taller 2

¿Cuáles son las creencias en las que se basa la enseñanza de las matemáticas?

Facilitadora
Dra. Antonia Hernández-Moreno
Preparatoria popular Ahuacuotzingo - Universidad Autónoma de Guerrero

El dominio afectivo (creencias, actitudes, emociones y valores…) es muy importante para la matemática educativa. Particularmente, las creencias matemáticas del profesor porque se considera que guían su práctica, moldean las creencias de los estudiantes y muchas veces facilitan o dificultan su quehacer en el aula. Durante el taller nos proponemos que los participantes reflexionen sobre sus creencias matemáticas y las creencias identificadas en la investigación. Para ello, se presentan diferentes tipologías y perspectivas teóricas acerca de las creencias matemáticas de profesores y se plantean una serie de preguntas que buscan la reflexión sobre los temas discutidos.

Ideas fundamentales y enfoques de la probabilidad mediante la simulación de un juego de tómbola

Facilitadores

Dra. Yuridia Arellano García - Fabiola Juárez Morales

En la vida cotidiana nos enfrentamos a situaciones de tipo aleatorio de forma recurrente, que muchas veces se "resuelven" usando nuestras intuiciones primarias, lo cual reduce las posibilidades de tomar una decisión basada en datos de forma consciente. Además, se nos demanda comprender, analizar y procesar información diversa y eso demandan de los sujetos competencias matemáticas asociadas al desarrollo de un pensamiento estocástico (SEP, 2019). En este taller se desarrollarán una serie de actividades diseñadas desde las ideas fundamentales (Heitele, 1975) que buscan mediante la simulación de un juego de tómbola desarrollar los enfoques de la probabilidad intuitivo, clásico y frecuencial (López-Mojica y Aké, 2019).

Referencias bibliográficas

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. Educational Studies in Mathematics, 6(2), 187–205.

López-Mojica, J. M., y Aké, L. (2019). Argumentos intuitivos de futuros profesores: una experiencia con probabilidad. Revista Eletrônica de Educação Matemática, 3(4),1-19.

SEP. (2019). Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. Plan de Estudios (SEP).

Taller 4.

Modelación matemática para la vida real

Facilitadores

Aline Vargas & Fátima Sandoval

Un objetivo central de la educación matemática es promover competencias de modelación matemática, es decir, competencias para resolver problemas de la vida real mediante el uso de las matemáticas. Pero ¿qué son los problemas de la vida real? Pues eso depende de cómo sea la vida de cada individuo, ya que las situaciones a las que se enfrenta en la vida cotidiana pueden variar para cada uno. Sin embargo, ya sea que se trate de un profesor, un científico, un conductor, un bombero, el dueño de un negocio, o un ciudadano responsable, pueden enfrentarse a problemas en los que requieren utilizar las matemáticas para resolverlos. En este taller abordaremos problemáticas realistas a las que pueden enfrentarse los individuos en diversos contextos y que se pueden resolver a través del uso de las matemáticas. Esto con dos propósitos principales: analizar los procesos llevados a cabo para resolverse y mostrar la utilidad de las matemáticas. Finalmente, apoyándonos de los resultados de las actividades realizadas durante el taller, mostraremos cómo podemos llevar a la práctica en el aula algunos elementos teóricos de la modelación matemática de la perspectiva realista.

Compartiendo ideas para diseñar actividades matemáticas. El caso de ecuaciones cuadráticas

Facilitadores

Dra. Marcela Ferrari Escolá - M.C. José Antonio Bonilla Solano

En el programa de secundaria mexicano se menciona el tema: "Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes" invitándonos a estudiar figuras geométricas utilizando herramientas algebraicas y viseversa, idea que será el tema central de este taller. En él discutiremos sobre cómo crear un libro de GeoGebra para propiciar el enlace entre álgebra y geometría, relación que se había desestimado en el Sistema Educativo en épocas anteriores y que consideramos importante rescatar en nuestras clases de matemáticas.

Los invitamos entonces a iniciar la producción de un libro de GeoGebra en conjunto a partir de un diseño disparador sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas usando las herramientas propias del álgebra del siglo IX. Esperamos que este taller sea el inicio de un grupo de profesores y estudiantes donde generemos, a corto o mediano plazo, recursos educativos digitales compartidos.