MEMORIA

Primer Coloquio

Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

Volumen 1

Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 1

MIPDM

1er. Coloquio
Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

UAGro
Universidad de Calidad con Inclusión Social

Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

Volumen 1

Editor

Marcela Ferrari Escolá

Coeditores

María Esther Magali Méndez Guevara

Nancy Marquina Molina

2020

Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

2020- Volumen 1

Editor
Marcela Ferrari Escolá

Coeditores
María Esther Magali Méndez Guevara
Nancy Marquina Molina

Editores técnicos
Martha Yadhira Roldán López
Juana Alicia Rojas Estrada
Karen Zúñiga González

1era edición: Junio 2020

Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas es una publicación anual editada por la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas www.mipdm.uagro.mx

Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero
Carlos E. Adame 54 – La Garita. Acapulco, Guerrero, México. C.P. 39650
Contacto: mipdm@uagro.mx

Cada uno de los capítulos que integran el libro fueron sometidos a un proceso de arbitraje con especialistas en la materia, por lo que cuentan con el aval de un comité de arbitraje compuesto por los miembros del Núcleo Básico de la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas e investigadores invitados.

Agradecimientos

Esta obra ha sido posible gracias al apoyo institucional de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero que cobija a la *Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas* propiciando el espíritu de compartir saberes y reflexiones más allá de nuestra propia comunidad.

Agradecemos especialmente a Conacyt, por apoyar el desarrollo profesional de nuestros maestrantes a través de becas haciendo posible alcanzar sus metas y sueños como jóvenes profesores de matemáticas. Son ellos los autores principales de estas Memorias del Coloquio Anual donde se discuten su ideas, avances y reflexiones sobre cómo y por qué innovar la práctica docente de matemáticas.

Agradecemos también a los colegas del Núcleo Académico Básico de la *Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas* así como a los investigadores invitados quienes han acompañado el proceso de edición a través de críticas y recomendaciones para una mejora de los artículo que hoy se comparten en este volumen.

Comité científico

Dra. Yuridia Arellano García

M. C. Jorge Samuel Manuel Camacho Orihuela

Dra. Marcela Ferrari Escolá

Dr. Edgardo Locia Espinoza

Dr. José Efrén Marmolejo Valle

M. C. José Efrén Marmolejo Vega

C.Dra. Nancy Marquina Molina

Dra. María Esther Magali Méndez Guevara

M. C. Gema Rubí Moreno Alejandri

Dr. Hermes Nolasco Hesiquio

Dedicatoria

En memoria de un ser excepcional los miembros del Núcleo Académico Básico y estudiantes de la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas dedicamos esta '*Memoria del primer coloquio: Reflexiones sobre la innovación de la Práctica Docente de Matemáticas*' a un colega entrañable para la comunidad de matemáticos educativos y un profesor que hacía honor a su vocación, el

Dr. José Marcos López Mojica

Aquellos que tuvimos la dicha de compartir con el Dr. José Marcos momentos felices, momentos de tensión y distancia, atesoramos cada instante que vivimos a su lado. Siempre encontramos en él esa paciencia, autocontrol y ética, entrelazados con su exigencia por la excelencia en la investigación y docencia. Un colega brillante, comprometido con nuestra comunidad académica, así como con nuestro país. Un compañero incansable en luchas y devenires que nos depararon saberes agridulces. Un amigo amable, de trato dulce y considerado hacia todos y cada uno de nosotros.

Gracias por todas las enseñanzas, lo extrañaremos Dr. José Marcos.

Primera generación:

Abril, Ali, Berni, Dani, Iri, Irma, Karen, Naye.

Presentación

La Memoria del Primer Coloquio: Reflexiones sobre Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas, expresa la inquietud, el entusiasmo y por supuesto el interés de los miembros que forman esta comunidad, que se preocupa y ocupa de las problemáticas que emergen en el aula de matemáticas.

Se explayan reportes de avances de proyectos de innovación para la práctica docente de matemáticas, a nivel básico y a nivel medio superior, por parte de los estudiantes de la primera generación de la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas.

Se exponen problemáticas que trastocan y sensibilizan la enseñanza de la matemática mediante: la inclusión, reflexión y propuestas para el desarrollo del pensamiento matemático, exhibiendo una variedad de metodologías y acercamientos para promover en la enseñanza de las matemáticas nociones fundamentales en el álgebra, la geometría, la variación y la probabilidad mediante la incorporación de constructos teóricos de la matemática educativa que han mostrado favorecer los procesos de construcción de saberes matemáticos, como; el contraejemplo, la argumentación, la conjetura, las trayectorias del aprendizaje, la modelación, la covariación y las ideas fundamentales de estocásticos. En el escrito podrán ver el uso de estos constructos en el plano escolar y con ello tener propuestas para incluir en la práctica docente de matemáticas.

Además, se muestran ideas expresadas por jóvenes de la Licenciatura de Matemáticas, la Licenciatura en Matemática Educativa y las primeras exploraciones de la segunda generación de la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas, expuestas en carteles de divulgación.

Es un gusto para nosotros compartir con el lector el trabajo de esta comunidad que no para a pesar de los momentos de la pandemia por el COVID-19.

Atentamente

Dra. María Esther Magali Méndez Guevara

Coordinadora de la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas

Acapulco de Juárez, Guerrero agosto de 2020.

Contenido

Avances de Investigación – Nvel Básico (secundaria)

Avances de Investigación – Nvel Medio Superior

Carteles

Avances de Investigación Nivel Básico

El pensamiento lógico, heurístico y creativo de adolescentes con NEE. Un estudio de casos[1]

Iridia Guzmán Zavaleta, J. Efrén Marmolejo Vega, J. Marcos López Mojica†

guzmaniridia@gmail.com

En este documento se reporta el análisis de las observaciones del proceso de intervención de tres actividades lúdicas matemáticas propuestas tanto heurística, creativa como lógicas dirigidas a estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE). Se adopta como marco teórico y metodológico el Modelo Teórico Local (MTL) y de la Intuición a la Formalización fundamentado en el principio de actividad de Galperin. La importancia de la intervención y puesta en escena de las actividades es generar teoría local sobre las producciones de los estudiantes con NEE. Las actividades se evaluarán a partir de indicadores cualitativos específicos de desempeño y posteriormente se rediseñarán para una segunda aplicación y valoración de los resultados del desarrollo cognitivo en los estudiantes.

Palabras Clave: NEE, discapacidad, integración educativa, juego, actividades lúdicas.

Introducción

Actualmente la escuela secundaria donde trabajo abrió sus puertas a la inclusión educativa de acuerdo con las políticas educativas, sin embargo, la realidad es que apenas se está dando la apertura a la *"integración educativa"* y es bajo este esquema que se está trabajando con una matrícula de jóvenes con necesidades educativas especiales (NEE) con discapacidad, que ronda los 85 alumnos en ambos turnos.

[1] Guzmán, I., Marmolejo, J. y López Mojica, J. (2020). El pensamiento lógico, heurístico y creativo de adolescentes con NEE: Un estudio de casos. En M. Méndez, M. Ferrari & N. Marquina (Eds.). *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 1* (pp. 1-24). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México.

Esta situación ha provocado el descontento de algunos compañeros que se rehúsan a trabajar con esta población estudiantil por el hecho de no querer implementar las estrategias necesarias en el desarrollo de sus planeaciones de clase e integrarlos dentro de las aulas. Este trabajo de tesis nace precisamente de la inquietud como docente frente a grupo por ofrecerles una enseñanza matemática de calidad y que cumpla con una educación pertinente que atienda a la diversidad.

Uno de los primeros retos a los que me enfrenté como docente, es a la dificultad para adaptar las actividades y rediseñarlas de manera específica para alumnos con NEE asociadas a una discapacidad moderada, sobre todo brindarles el tiempo necesario en clases. Inicialmente creí que iba a ser fácil trabajar con alumnos con discapacidad, sin embargo, comprendí que no estaba preparada para tratar a los alumnos con estas características, lo que es importante para potenciar sus habilidades cognitivas, así como formar un equipo sólido con los demás profesores, padres de familia, alumnos y el maestro de apoyo USAER, para tener herramientas suficientes en la medida de nuestras posibilidades como comunidad escolar.

La situación diaria que vivo en el aula de clases, condujo a que me inclinara por este tema de investigación, estudiar y prepararme para tener herramientas pedagógicas ***innovadoras de matemáticas***, pues mi práctica docente no resultaba útil para ellos, incluso otros docentes prefirieron reportarlos como reprobados, sin interesarse en lo más mínimo por indagar las causas de lo que ellos consideraron un problema infranqueable cuya solución es de nuevo separarles de los grupos regulares y canalizarlos al programa de USAER.

Ante esta problemática, el objetivo principal de este proyecto de titulación es diseñar actividades e indicadores específicos, para motivar al alumnado y despierten sus intereses, favoreciendo la comunicación y el trabajo, que evidencien las experiencias de aprendizaje relativas al pensamiento heurístico, creativo y lógico alternativas a las del currículo tradicional, mediante juegos de estrategia, que permitan valorar cualitativamente logros de maduración estratégica, reglas finas y de desempeño que satisfagan las actividades realizadas por adolescentes caracterizados con NEE (discapacidad).

Contextualización de la Educación Especial

En México el sistema educativo en las últimas décadas ha tenido logros notables y cambios interesantes, una mayor cobertura en educación básica, que ronda en el 87.5 % de la población de entre 6 y 14 años que saben leer y escribir (INEGI, 2015). El aumento de eficiencia terminal y el promedio de la escolaridad aún enfrentan retos que impiden que algunas niñas, niños y jóvenes tengan acceso a la educación que requieren, como es el caso de la población que presenta NEE, principalmente aquellas asociadas a una discapacidad, que ha tenido menores posibilidades de acceder o permanecer en los servicios educativos.

En el proceso de indagación, se valoró el concepto de "*inclusión*", es tan amplio y no solo tiene que ver con alumnos con NEE con o sin discapacidad, sino que va más allá e involucra a una comunidad vulnerable como los indígenas, migrantes, alumnos de escasos recursos, por mencionar a algunos que tienen que ver con atender los preceptos tanto de la Declaración de Salamanca (DS) y la UNESCO, referidos de la educación para todos sin importar sus características físicas o intelectuales, ni su situación cultural, religiosa, económica, étnica o lingüística (García Cedillo & Romero Contreras, 2019).

Sin embargo, el trabajo lo centro en lo que conocemos como "***Integración Educativa***", con miras a que en un futuro la escuela brinde un servicio de educación inclusiva.

Educación Especial: (NEE) Necesidades Educativas Especiales

La educación especial en México nace desde 1867 con diversos programas y escuelas de apoyo, sin embargo, un gran porcentaje de escuelas y centros educativos se resisten en ofrecer este tipo de apoyos dentro de sus aulas regulares, prácticamente lo conciben como una carga extra de trabajo para los docentes frente a grupo, catalogando y estigmatizando a esta comunidad estudiantil "especial" y que deben recibir educación únicamente por personal especializado, separándolos de las aulas y de ese andamiaje que día a día se va construyendo entre todos los alumnos.

Con la firma del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica en mayo de 1992, este acuerdo produjo grandes cambios pues se inició formalmente el proceso de ***Integración Educativa***, lo que también implicó un cambio en la orientación de los servicios, pues pasaron a trabajar desde un modelo médico a un modelo social-educativo. (Romero Contreras & García Cedillo, 2013).

Sobre la definición de las NEE plantea que éstas aparecen cuando los alumnos presentan un ritmo de aprendizaje muy distinto al de sus compañeros y los recursos de la escuela son insuficientes para apoyar sus aprendizajes. Se precisa que las NEE están asociadas a las siguientes condiciones: a) ambiente social y familiar en que se desenvuelve el niño; b) ambiente escolar en que se educa al niño, y c) condiciones individuales del niño (García, y otros, 2000).

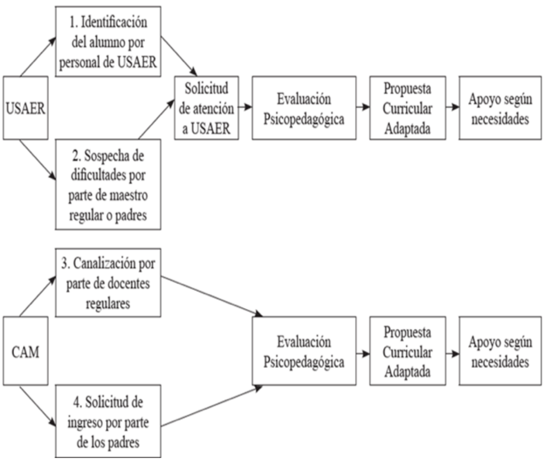
La Declaración de Salamanca, (UNESCO, 1994), adoptó el concepto de alumnos con NEE y se crearon las Unidades de Servicios de Apoyo a la Educación Regular (USAER) que, entre sus principales funciones están: realizar las evaluaciones psicopedagógicas. (Romero Contreras & García Cedillo, 2013). Y las Escuelas de Educación Especial se transformaron en Centros de Atención Múltiple (CAM), que atienden a alumnos con discapacidades muy severas o con discapacidad múltiple.

El país adoptó la clasificación propuesta por la UNESCO, en cuanto a la definición de la discapacidad. Así, oficialmente se aceptan seis tipos de discapacidad *(física, intelectual, mental, auditiva, visual y múltiple).*

El concepto de Necesidades Educativas Especiales tal y como lo entendemos hoy en día, amplía el sentido de la Educación Especial, que evita una connotación segregadora, y no restringe las necesidades educativas a una población tradicionalmente "etiquetada" con nombres como deficiente mental, disminuido psíquico, débil mental, etc. (Paula, 2003).

Figura 1.

Formas de acceder a los servicios de Educación Especial: USAER y CAM en México



La definición de discapacidad, integra una visión biopsicosocial que considera, una pérdida a nivel del cuerpo, determinada por una alteración fisiológica o estructural que afecta una función y, por otra parte, un complejo fenómeno a nivel social. Por lo tanto, discapacidad implica disfunción en uno o más de tres niveles de funcionamiento humano, (ICF, 2002):

Corporal. Alteraciones funcionales o estructurales que determinan una alteración significativa o pérdida.

Personal. Limitaciones o dificultades para ejecutar actividades.

Personal en el contexto social. Restricciones derivadas de problemas para involucrarse o participar en situaciones de vida.

Integración Educativa

Con el nuevo Modelo Educativo de la Escuela Mexicana, se retoma la inclusión educativa con mayor seriedad cuando menos en el discurso, de tal manera que de acuerdo con algunos especialistas como el Dr. Ismael García Cedillo expuso los distintos modelos para el abordaje educativo, iniciando con el ***modelo asistencial*** que nace a partir de instituciones religiosas.

Posteriormente, añadió, el ***modelo médico*** el cual vio la discapacidad en el sujeto. El ***modelo psicosocial***, cuyo enfoque estaba centrado en la interacción que tiene el sujeto con el medio, catalogando cualquier problema físico como "deficiencia". Y es a partir de este modelo cuando surge el concepto de ***Integración Educativa.*** Finalmente, el ***modelo social*** que se aplica en la actualidad, el cual postula que no existen personas con discapacidad, sino sociedades discapacitantes.

Por otro lado, cabe resaltar que, si bien es cierto muchos de los maestros jóvenes en servicio tuvieron una formación inicial diferente a la docencia, esta situación provoca un trato diferente hacia los alumnos y recae de cierta forma en lo que de manera acertada comenta García Cedillo: *"los maestros no cambian su paradigma de trabajo centrándose en el grupo y no en individuos"*.

La etapa de *integración educativa* en México se caracterizó en dos momentos importantes en la historia de la educación especial (EE):

- El primer momento de 1993 a 2002 en el que ocurren los cambios legales a través de los cuales se lleva a cabo la reorganización para la atención a la diversidad en México.
- El segundo momento se da en la etapa de la integración de 2003 a 2013, en el que se generalizó a la atención y a la diversidad con el modelo de *"escuelas integradoras"*.

Marco Teórico y Metodológico

Se hace referencia al marco teórico y metodológico que orientará el trabajo, es el denominado Modelo Teórico Local (MTL), que tiene como componentes la "descripción de la competencia en el dominio de la enseñanza y aprendizaje que va a ser investigado" (Puig, 2006). El cual alinea las acciones a realizar en el curso de las actividades. La teoría de modelos locales permite analizar, de manera localizada y específica, distintos aspectos o componentes de los fenómenos de la matemática educativa, como son los de competencia formal, de enseñanza, de procesos cognitivos y de comunicación (Filloy, Puig, & Rojano, 2008).

Modelo Teórico Local (MTL)

El marco teórico y metodológico desempeña un papel central, la idea de que lo que se elabora y analiza son los resultados de una investigación y su organización. El carácter local viene dado por el hecho de que el modelo se elabora para dar cuenta de los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos (Puig, 2006). Los MTL se adaptan al propósito del trabajo, toda vez que tanto el contexto, los participantes y la experiencia no tienen presupuestos teóricamente estudiados con anterioridad, sino que, es en la misma experimentación donde se producen situaciones que mediante la observación, generan los elementos susceptibles de ser analizados o teorizados inicialmente.

De acuerdo con el esquema de la Figura 2, se describen las dos fases dentro del MTL y cada elemento que las componen:

Fase 1: "Diseño Metodológico"

- *Problemática:* La atención con equidad de los estudiantes con NEE que han sido sujetos desde la segregación hasta la integración educativa sin que se haya resuelto, tratarles en condiciones iguales de aprendizaje, en el ámbito de la matemática para el desarrollo del pensamiento heurístico-lógico y creativo.
- *Análisis previos de los problemas:* Estudio específico de las condiciones especiales de estudiantes con NEE y del contexto escolar, focalizado en la enseñanza aprendizaje de la matemática.
    - *Modelo de competencia formal:* Análisis fenomenológico de los procesos heurísticos, creativo y lógico, como formas de pensamiento matemático.
- *Modelo de cognición y comunicación:* Actuaciones de los niños, explicación de por qué se comportan así. Formas de comunicar a los estudiantes las tareas, los adolescentes con NEE" no pueden y los niños regulares sí". Marco de referencia (revisión bibliográfica) ¿quiénes sí y quiénes no?
- *Modelo de enseñanza:* Currículo de secundaria:
    - Prácticas de enseñanza común en profesores.
    - Uso de materiales didácticos y herramientas tecnológicas.
- *Diseño del modelo teórico local:* Del análisis previo de la problemática, diseñamos un primer modelo de los supuestos que explican los resultados de la segregación e integración, para generar hipótesis. ¿Cómo está implicado el conocimiento matemático a través de estas formas del pensamiento?: "juego".

Figura 2.

Esquema del Modelo Teórico Local, de Eugenio Filloy Yagüe

- *Hipótesis teóricas a contrastar con la observación:* Es posible generar producciones en los estudiantes con NEE que expresen formas de los pensamientos: heurístico, creativo y lógico mediante el juego, ante la ejecución de las situaciones problémicas ¿Cómo actúan los niños frente a las situaciones problémicas? ¿La ejecución matemática guarda diferencias significativas? ¿La verbalización de la estrategia es coherente y lógica?

Fase 2: "Diseño del Desarrollo de la Experimentación"

- *Se realizará:*
  1. Preparación de las secuencias didácticas por situación problémica.
  2. Preparación del instrumento de Observación (indicadores de observación).
  3. Trabajo directo con estudiantes (puesta en escena).
  4. Aplicación en el grupo muestra de las situaciones didácticas diseñadas mediante la utilización de prototipos matemáticos como juegos de lógica, mentales y destreza (Ranas saltarinas-Torres de Hanói-Sudoku).
- *Selección de los niños con NEE:*
  1. Caracterización de los alumnos con NEE en función con las fichas descriptivas.
  2. Diálogo heurístico con cada niño en preparación y participación en la experiencia.
  3. Familiarización con tareas tipo.
- *Análisis de las actuaciones:* Elaboración de un catálogo de observación, Modelo de Cognición y Comunicación.
- *Estudio de casos:* Observación mediante acción de grupo y entrevistas videograbadas con el grupo muestra elegido.
- *Análisis de interpretación de las actuaciones en grupo y en las entrevistas:* Elaboración de un catálogo de observaciones relacionadas con las actividades en grupo y entrevistas y contrastar.
- *Elaboración del nuevo modelo teórico local:* La perspectiva del problema

El juego

Para alcanzar los objetivos propuestos, se plantean actividades lúdicas estructuradas en un nivel gradual de dificultad ascendente, en las que se trabaja "el juego" (Troncoso Presa & Raposo Rivas, 2012).

De acuerdo con lo que señalan Alsina y Planas (2008) sobre el *juego*, se destaca la idea de que el juego es un placer en sí mismo, permite resolver problemas y pone en práctica diferentes procesos mentales. Las principales funciones del juego son favorecer el desarrollo intelectual, social y emocional de manera divertida y motivadora. Además, estimula la comunicación, el trabajo en equipo y la aceptación de normas.

El juego es parte fundamental del desarrollo del niño desde sus primeros pasos. Autores como (Piaget, 1973), recalcan la íntima relación que existe entre la clase de juegos que practica un niño y la etapa de desarrollo en la que se encuentra. Con respecto al juego existen numerosas investigaciones de diferentes autores, de las cuales, se señalan a continuación diferentes conceptos (Tabla 1).

Tabla 1:

El juego en distintas perspectivas

Autores	Conceptos sobre "juego"
Piaget (1973)	Plantea que el juego es un proceso de adaptación a la realidad y una actividad eminentemente formativa.
Bruner (1988)	Por medio del juego se produce un aprendizaje de calidad
Winnicott (1993)	Por medio del juego se genera un espacio intermedio entre realidad objetiva y la imaginaria. Permite realizar actividades que en la realidad no se prodría realizar.
Vygotski (2000)	Señala que el juego supone una zona de desarrollo proximal de aprendizaje
Bishop (1988)	Concluye que todas las culturas han desarrollado actividades relacionadas con las matemáticas y vinculadas a distintos grupos de edad: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar.
De Guzmán (1989)	Compara la manera de proceder en el juego y el procedimiento habitual en matemáticas

El juego como recurso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

¿Qué entendemos por juego? Según el diccionario de la Real Academia Española (RAE) es un: *"Ejercicio recreativo o de competición sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde"*. Analizando esta definición tenemos que un juego es una actividad:

- ***Recreativa:*** Se realiza la actividad del juego por el puro objeto de hacerlo, sin esperar ninguna otra utilidad, salvo la del placer de ganar el juego.
- ***Sometido a reglas:*** Cada juego dispone de sus propias reglas que el jugador acepta libremente y son las que definen la estructura del juego.
- ***De competición en el cual se gana o se pierde:*** Lo que involucra el factor emocional en forma de tensión por ganar, alegría al conseguirlo o frustración al perder.

Podemos incluir algunas características más, como las que enumera (Huizinga, 2014):

- ***Es una actividad seria:*** No hay que confundir la idea de juego con la idea de broma o banalización de una actividad.
- ***Es una actividad separada de la vida ordinaria***, en su propio universo con sus propias reglas, desarrollada en sus propios límites espaciales y temporales.

El juego como recurso didáctico para enseñar matemáticas

¿Por qué parecen estar tan íntimamente ligados los juegos con las matemáticas? Según (Corbalán, 1994), esta relación estriba en que los juegos y los problemas de matemáticas tienen una estructura muy similar, al tener sus propios límites espacio-temporales y unas reglas establecidas de antemano.

No solo los juegos y los problemas matemáticos comparten muchos elementos en común, sino que, la historia nos da numerosos ejemplos de cómo los juegos funcionan como chispa inicial a la necesidad de desarrollar herramientas matemáticas.

Directrices heurísticas para resolver juegos

De Guzmán (1984) plantea una serie de preguntas que hacerse a la hora de enfrentarse a un juego por primera vez. Dichas directrices son muy similares, a los conocidos pasos de (Polya, 2004), para resolver problemas, remarca el estrecho nexo que une problemas matemáticos con juegos:

1. *Antes de hacer, trataré de entender*. ¿Sabes de qué trata el juego? ¿Entiendes todos sus componentes (fichas, tablero, reglas...)?
2. *Encontraré una estrategia*. ¿Has visto algún juego similar antes? ¿Te puede servir para pensar cómo actuar? ¿Puedo empezar por una versión fácil?
3. *Empieza a jugar.* Prueba tu estrategia ¿te está funcionando? Si no ¿en qué falla exactamente? Sabiendo en qué falla ¿puedo usar esa información para mejorar mi estrategia?
4. *Mira bien cómo lo has conseguido, por qué ha funcionado tu estrategia.* ¿Cuál es la idea central que te ha permitido resolverlo?

Son varios los autores que afirman de los beneficios de llevar el juego a las aulas de clases, pero hay poca literatura que retoma el juego con fines matemáticos para niños que presentan NEE en nivel básico. El juego espontáneo está lleno de significado afirma de (Guzmán, El juego: un pretexto para el aprendizaje de las matemáticas), porque surge con motivo de procesos internos, ya que favorece la maduración y el pensamiento creativo.

Tratamiento Metodológico en las Secuencias Didácticas

Las secuencias didácticas se desarrollarán bajo la metodología derivada de la *Enseñanza Problémica* en sus aspectos relativos al diseño y puesta en escena al secuenciar acciones de la intuición a la formalización de (Marmolejo Valle, Moreno Alejandri, & Marmolejo Vega, 2017).

El tratamiento metodológico aplicado a este diseño se fundamenta en el principio de actividad de Galperin (1992) extendido por Talízina (2002). Del primero se retoman los tres momentos en que transcurre la formación por acciones de una actividad, a saber: formación de la base orientadora de la acción; formación del aspecto material de esta acción; formación de su aspecto verbal externo; y formación de esta acción como un acto mental a través del lenguaje interiorizado.

En esta etapa, el alumno participa colaborativamente en la tarea, la que realiza haciendo uso de las operaciones necesarias, así, asimila el contenido de la acción, en tanto que el profesor realiza el seguimiento y control objetivo de la adecuada consecución de cada operación que conforma la acción, ya sea a partir de su orientación directa o por medio de algún apoyo material externo.

Por su parte, Talízina (2002) destaca que el alumno asimila la acción como materializada, desplegada, generalizada, pero evitando su automatización, siendo más bien parte de una transición; esto es, se puede combinar desde el principio con la verbal, lo cual implica que los alumnos formulen en el habla todo lo que realicen en la práctica de manera material.

Al respecto, se producen tres cambios esenciales:

1) La *acción verbal* se estructura no sólo como un reflejo real de la acción realizada con el objeto, sino también como una comunicación verbal de la misma.
2) La *asimilación en la forma verbal* se observa por el habla, la cual se convierte en la portadora de todo el proceso, ya que no sólo implica la comprensión de las palabras empleadas, sino además estas palabras llevan el contenido de la tarea y de la acción.
3) La etapa de *interiorización de la acción* como un acto mental conlleva que la tarea de comunicación es sustituida por el habla para sí, suscitando de este modo la reflexión, aquí, se generan las condiciones de caracterizar a la cosa construida de diferentes formas de representación, reflexionando sobre su significado.

Participantes y Contexto

El trabajo de investigación se lleva a cabo dentro de la escuela Secundaria General N° 6 "Tierra y Libertad", en el turno vespertino; ubicada en la colonia Emiliano Zapata, cuenta con 5 edificios de material, 18 salones de clases, áreas administrativas y de intendencia, laboratorios, talleres, bodega, canchas, plaza cívica, salón de usos múltiples, aula de medios, sala audio visual, sanitarios, área de cooperativa y mesas y estacionamiento. La plantilla de personal es de 83 elementos entre directivos, profesores, administrativos, personal de apoyo e intendencia. Con una matrícula en ambos turnos de 1,200 alumnos del presente ciclo escolar 2019-2020 aproximadamente.

Los informantes fueron dos estudiantes a los que nos referiremos como:

Alumna "K"[2]: Es una alumna de 14 años, estatura pequeña sin llegar al enanismo, presenta dificultades en el habla, físicamente está

[2] Alumna "K", se hace referencia con ese nombre para proteger su privacidad (género femenino).

sana a excepción de su dentadura que pareciera que está mudando, tiene 7 años de acuerdo a su maduración. Una de las cualidades más importantes en ella, es que es una alumna muy responsable, dedicada y se expresa mediante dibujos. De manera esporádica le aplican "*Genotropin C* (somatropina solución inyectable 5.3 mg)" para estimular el crecimiento hormonal.

Alumno "A"[3]: Es un alumno de 14 años con estatura y complexión normal de acuerdo con la edad, presenta dicción y producciones escolares confusas, le cuesta comunicarse tanto oral como en forma escrita. Situación que le ha traído algunos problemas de conducta con maestros y compañeros. Emocionalmente es un adolescente muy sensible y esto afecta en gran medida en su desarrollo personal y académico.

Síntesis de las actividades

Este trabajo de investigación propone tres actividades a través del modelo de competencia formal el cual se elabora mediante un análisis fenomenológico de los procesos (actividades matemáticas con juegos) heurístico, creativo y lógico, se pretende que mediante la modelización de estos procesos le permita decidir al alumno sobre la mayor o menor complejidad de cada juego propuesto y por lo tanto se espera que tengan de una mayor a menor dificultad al resolverlos. En este análisis fenomenológico se pretende identificar los precursores sobre los conceptos de: heurística, creativo y lógico.

La *heurística*: Mediante este tipo de pensamiento se busca solución a problemas planteados, basándose en la experiencia y conocimientos previos, desembocando en una solución efectiva a un problema planteado, aún y cuando esta solución no sea la solución

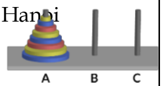
[3] Alumno "A", se hace referencia con ese nombre para proteger su privacidad (género masculino).

óptima (el ensayo y error, búsqueda de patrones, analogías y la generalización).

El *pensamiento creativo:* Valora la autonomía del pensamiento y el uso de la información, propicia la búsqueda de situaciones de mejora y la propuesta de soluciones innovadoras.

El *pensamiento lógico*: Analiza situaciones, identifica factores determinantes de situaciones y el cuestionamiento del valor lógico de situaciones para encontrar soluciones satisfactorias.

Las actividades propuestas son:

Juego	Objetivo del Juego	Contenido Matemático
Torres de Hanoi 	El objetivo del juego es crear la pila en otro de los postes siguiendo ciertas reglas, encontrar el número de movimientos necesarios para transferir "*n*" discos del poste A al poste C.	Conjuntos y números $f(n) = 2^n - 1$ $n \geq 1$
Ranas 	El objetivo del juego es intercambiar la posición de las fichas oscuras (ranas cafés) y fichas claras (ranas verdes), es decir, "mover" las fichas oscuras al lado derecho y las fichas claras al izquierdo. Para lo que es necesario seguir ciertas reglas sobre el movimiento de las fichas.	N-ésimo número en sucesiones $a_n=2n+1$
Sudoku 	El objetivo del sudoku es rellenar una cuadrícula de 4×4 celdas (16 casillas) dividida en subcuadrículas de 2×2 (también llamadas "cajas" o "regiones") con las cifras del 1 al 4 partiendo de algunos números ya dispuestos en algunas de las celdas.	Cálculo de probabilidades

Las dos primeras actividades se relacionan en algunos aspectos heurísticos y creativos, no van seriadas o secuenciadas en nivel de complejidad, es más bien una reafirmación una de la otra para encontrar patrones y estrategias a seguir y resolver el juego. En la tercera actividad básicamente se enfatiza la parte lógica en el acomodo correcto de los números, el sudoku se propone que inicie con el de 4x4, posteriormente ir incrementando las regiones y casillas, con la finalidad de observar y analizar el proceso cognitivo y estrategias del alumno.

A cada actividad "juego" se le adecuaron indicadores de valoración específicos (escala estimativa). Para permitir identificar el nivel cognitivo del alumno y hasta qué nivel se le puede llevar en las actividades sugeridas, es decir mediante este análisis de observación se van a ir valorando los resultados en cada intento para en lo posterior adecuar estrategias personalizadas que permitan un avance de un nivel a otro.

Figura 3.

Tabla de los indicadores a utilizar en la puesta en escena de cada actividad

"TORRES DE HANÓI"

Situación (núm. de discos)	Indicadores		Intentos										Observaciones	
			1		2		3		4		5		Actitudes emocionales	Comentarios
			Num. Mov.	T (seg.)	Num. Mov.	T (seg.)	Num. Mov.	T (seg.)	Num. Mov.	T (seg.)	Num. Mov.	T (seg.)		
Con 2 discos	Pensamiento Heurístico	*Ensayo y error*												
		Búsqueda de patrones												
		Analogías												
		Generalización												
	Pensamiento Creativo	Autonomía de pensamiento												
		Uso de la información												
	Pensamiento Lógico	Análisis de situaciones												
		Identificación de factores determinantes de situaciones												
		Cuestionamiento del valor lógico de situaciones para encontrar soluciones satisfactorias												

Básicamente las tres actividades consisten en explicarle al alumno de qué trata, atendiendo las reglas previamente establecidas. La intención es registrar diferentes datos, que evidencia el proceso, por ejemplo: ¿cómo es que el alumno hace uso de la heurística y del pensamiento creativo? iniciando el juego desde el nivel uno, en el que se registran el número de intentos, el tiempo cronometrado, si atendió a las indicaciones, así como ciertas actitudes corporales y aptitudes cognoscitivas y destrezas que se deben valorar en el desarrollo de la actividad. Una vez realizada de manera satisfactoria cada nivel y que el alumno fijó la estrategia o patrón, pedirle que verbalice la acción para reafirmarlo con una nueva jugada, así sucesivamente con cada nivel. De manera similar la actividad del sudoku, pero aquí solo se valorará más de cerca el acomodo correcto de los números en las casillas, columnas, renglones y regiones.

Estas actividades mediante ***"juegos de estrategia"*** son conocidas y utilizadas en la historia de las matemáticas y en la matemática educativa; revisando detenidamente los planes y programas de estudio del nivel secundaria, se habla de un pensamiento matemático que provoque en los alumnos razonar lo que están haciendo en su contexto matemático y en su vida diaria y lo que el docente debe potenciar en el alumno; sin embargo, la realidad es que la mayoría de los maestros frente a grupo no tienen herramientas específicas para hacerlo, porque se cae en la falsa idea de que las matemáticas son algoritmos que se deben seguirse e incluso aprenderse de memoria, dejando de lado el pensamiento heurístico, creativo y lógico.

De acuerdo con (Chumillas Botam, 2018), los docentes tenemos la tarea de hacer nacer la motivación intrínseca de nuestros estudiantes para que la creatividad, la curiosidad y el interés afloren en ellos y así mejoren su proceso de aprendizaje. Para ello, *se pretende indagar sobre el papel que desempeña el juego en el aula y sobre sus posibles efectos beneficiosos en el proceso de enseñanza-aprendizaje*.

Recolección de datos y su análisis

La recolección de datos está pensada que se haga mediante diferentes instrumentos: aplicación de actividades, videograbación, entrevista, fotografías de las producciones, registro de los indicadores en cada actividad (tiempos, número de intentos, observaciones generales), la verbalización de los alumnos de cómo lograron concretar la actividad y lo que significó para ellos, la interacción docente - alumno.

Cada uno de los instrumentos utilizados para recolección de datos evidencian diferentes intenciones al momento del análisis y en su conjunto darán un resultado integral, pero sin duda alguna la videograbación es el que revela la mayor parte de las experiencias y permite analizar a detalle situaciones que se puedan escapar en el registro de datos y valoraciones actitudinales del alumno.

Primeros Resultados

Para generar un primer referente sobre cómo se generan las producciones de los niños NEE con discapacidad, ante situaciones problémicas que se operan con las formas del pensamiento heurístico, creativo y lógico (formas de pensamiento que son transversales en el tratamiento de todo contenido matemático), cuyo desempeño se refleja al mostrar determinadas habilidades propias de pensamiento matemático, se realizan las experiencias de este proyecto con alumnos con discapacidad, de manera individual y cuyos resultados habrán de arrojar elementos que permitan diseñar actividades de aplicabilidad grupal en condiciones escolares, orientadas a la integración educativa

La primera puesta en escena con el juego de las ranas saltarinas se aplicó a dos alumnos y no fueron satisfactorios los resultados, esto provocó que se desatendiera a uno de ellos mientras se trabajaba con el otro, aunado a esto las herramientas para la toma de datos fueron insuficientes y el video que se tomó no revelaba las producciones obtenidas, sino más bien un panorama amplio de lo que sucedió.

En términos generales esta primera aplicación dio lugar a diversas áreas de oportunidad que se deben mejorar y condujo a una segunda puesta en escena, la cual se realizó con un solo alumno de tercer grado de secundaria, ajeno al proyecto de investigación con las correcciones necesarias derivadas de la primera actividad, con apoyo más específico en la toma de datos (videograbación y fotografía) incluyendo una tabla de indicadores relativos al pensamiento (heurístico y lógico) en los diferentes niveles de la actividad y se cronometraron los tiempos en cada intento.

Sobre esta segunda aplicación con el juego de las "las torres de Hanói" se encontraron aspectos importantes que señalar. Se hizo énfasis en el mínimo de movimientos que el alumno debía lograr en cada nivel retándolo a lograrlo para provocar en él, interés por resolver el juego. Se observó que en repetidas ocasiones el alumno seguía resolviendo por ensayo y error sin lograr identificar patrones o estrategias que le permitieran resolver el juego.

Conclusiones

Siendo un trabajo de investigación de tesis poco común en el área de EE en matemática educativa, se considera que es un trabajo ***innovador*** tanto por la metodología utilizada como por las estrategias del juego, siendo una actividad lúdica muy versátil que permite ser explorado desde diferentes perspectivas por los docentes en servicio y con suficientes herramientas para llevarlo al salón de clases en apoyo a niños y jóvenes con condiciones de NEE y discapacidad.

Básicamente el hecho de retomar las tres formas de pensamiento como actividades rectoras para desarrollar los contenidos matemáticos y valorar los avances cognitivos de esta comunidad estudiantil, es una innovación dentro de la práctica docente y sobre todo permitirles que se sientan parte de un grupo y no segregarlos en las aulas de USAER.

Referencias bibliográficas

Alsina, Á., & Planas, N. (2008). *Matemáticas Inclusiva. Propuesta para una educación matemática accesible*. Madrid, Narcea S. A. ISBN: 8427715919, 9788427715912, 172 p

Bishop, A. J. (1988). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*, Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Bruner, J.S. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación. Selección de textos por Jesus Palacios*. España: Morata

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. España: Síntesis.

Chumillas Botam, Á. (2018). *El juego como recurso didáctico en lengua castellana y literatura. Propuesta de intervención para tercero de secundaria.* Informe de Intervención, Lérida. https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/6851/CHUMILLAS%20BOTAN%20ANGELA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

De Guzman, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Revista SUMA 4,* 61-64.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(3), 327-342.

Galperin, P. (1992). The Problem of Activity in Soviet Psychology. *Journal of Russian and East European Psychology 30* (4): 37-59. Recuperado el 29 de Junio de 2019

García Cedillo, I., & Romero Contreras, S. (10 de Octubre de 2019). Influencia de la Declaración de Salamanca sobre la atención a la diversidad en México y sutuación actual. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva 13*(2), 123-138. Recuperado el 12 de febrero de 2020

García, I, Escalante, I., Escandon, M., Fernández, L., Mustri, A., & Puga, I. (2000). *La integración educativa en el aula regular. Principios, finalidades y estrategias*. México: Secretaría de Educación Pública.

Huizinga, J. (2014). *Homo ludens.(*E. Imaz, Trad.) Madrid, ES: Editorial Aliaza/Emercé

ICF - The International Classification of Functioning, Disability and Health (2002). *ICF Beginner's Guide: Towards a Common Language for Functioning, Disability and Health.* Recuperado el 28 de Junio de 2019, de Wordl Health Organization: https://www.who.int/

INEGI (2015). *Encuesta intercensal.* México. https://www.inegi.org.mx/programas/intercensal/2015/

Marmolejo Valle, J. E., Moreno Alejandri, G. R., & Marmolejo Vega, J. E. (Enero-Junio de 2017). Desarrollo del pensamiento lógico, heurístico y creativo en ambientes virtuales: una propuesta. *Revista Electrónica AMIUTEM, V*(1), 58-70. https://revista.amiutem.edu.mx

Paula, I. (2003). *Educación especial. Técnicas de intervención.* Mc Graw Hill. Madrid.

Piaget, J., (1973). *La formación del símbolo en el niño*. México: F.C.E. pág.205.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En M.P. Bolea, M. Morena & M.J. Gonzáles (Coord.) *Actas del X Simposio de la Socasz<xiedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp.107-126) Huesca, 6-9 de septiembre de 2006.

Romero Contreras, S. & García Cedillo, I. (2013). Educación especial en México. Desafíos de la educación inclusiva. *Revista Latinoamericana de educación inclusiva 7(2),77-91*

Talízina, N.F. (2002). *Práctica para la psicología pedagógica*. Moscú: Academia.

Troncoso Presa, A. B., & Raposo Rivas, M. (2012). La utilización del blog con alumnado que presenta discapacidad intelectual: Una experiencia de mejora del aprendizaje. *Libro de Actas. I Congreso Virtual Internacional sobre Innovación Pedagógica y Praxis Educativa, INNOVAGOGIA 2012. (169-176).* Sevilla, España: *AFOE*

UNESCO (1994). *Declaración de Salamanca de Principios, Política y Práctica para las Necesidades Educativas Especiales.* Aprobada por aclamación en la ciudad de Salamanca, España, el día 10 de Junio de 1994

Vygotsky, L. (2000). El papel del juego en el desarrollo del niño. En L. Vygotsky, *El desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores* (S. Furió , Trad., pág. 142). Barcelona, España: Crítica.

Winnicott, D.W. (1993). *Realidad y Juego*. España: Gedisa, p. 102

El uso del contraejemplo como estrategia para el desarrollo del razonamiento lógico-matemático en estudiantes de educación secundaria: El caso de las ternas pitagóricas[4]

Bernardo Nájera Alday - Edgardo Locia Espinoza

beremiznajera@gmail.com

Este trabajo pretende aportar elementos para la introducción del uso del contraejemplo a nivel secundaria como una vía para iniciar en el razonamiento matemático a los estudiantes de este nivel. En el plan de estudios 2017, está considerada tal iniciación, sin embargo, ni el plan, ni los programas de estudio, ni los libros de texto, indican cómo debe hacerse. En particular, diseñaremos e implementaremos una secuencia de aprendizaje que propicie la construcción de conjeturas y el uso de contraejemplos en el marco de la estrategia didáctica conocida como Debate Científico en Cursos de Matemáticas. El trabajo se sustenta en la Teoría de Situaciones Didácticas. Con los resultados de una primera exploración concluimos que es pertinente reorientar el diseño, enfocándonos en la actividad matemática más profunda de la secuencia diseñada.

Palabras Clave: secundaria, razonamiento matemático, contraejemplo, argumentar, conjeturas.

[4] Nájera, B. y Locia, E. (2020). El uso del contraejemplo como estrategia para el desarrollo del razonamiento lógico-matemático en estudiantes de educación secundaria: El caso de las ternar pitagóricas. En M. Méndez, M. Ferrari & N. Marquina (Eds.). *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 1* (pp. 25-46). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México.

Introducción

En el Plan de Estudios de Matemáticas para Educación Secundaria (SEP, 2017), el término Pensamiento Matemático se define como: la forma de razonar que utilizan los matemáticos profesionales para resolver problemas provenientes de diversos contextos ya sea que surjan en la vida diaria, en las ciencias o en las propias matemáticas (p.158). Se precisa en el referido plan que: "este pensamiento, a menudo de naturaleza lógica, analítica y cuantitativa, también involucra el uso de estrategias no convencionales y se establece que, en la secundaria, se pretende "que los estudiantes desarrollen esa forma de razonar y que al hacerlo aprecien el valor de ese pensamiento, lo que ha de traducirse en actitudes y valores favorables hacia las matemáticas, su utilidad y su valor científico y cultural" (pág. 158). Asimismo, "mediante el trabajo individual y colaborativo en las actividades de clase debe buscarse que los estudiantes comprendan la necesidad de justificar y argumentar sus planteamientos y la importancia de identificar patrones y relaciones como medio para encontrar la solución a un problema" (pag.159)

Adicionalmente, el Plan de Estudios también enfatiza que, "además de la adquisición de un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurados, la actividad matemática tiene la finalidad de propiciar procesos para desarrollar otras capacidades cognitivas, como clasificar, analizar, inferir, generalizar y abstraer, así como fortalecer el pensamiento lógico, el razonamiento inductivo, el deductivo y el analógico" (pág. 161).

Sin embargo, a pesar de que el plan de estudios reconoce la importancia del razonamiento matemático en la formación de los alumnos de secundaria, no se hace explícito ni en los programas de estudio, ni en los libros de texto, cómo los profesores lograrán desarrollarlo en el alumno.

En este sentido, se han desarrollado diferentes investigaciones encaminadas a hacer un análisis detenido del razonamiento matemático y a dotar a los profesores de herramientas que les permitan desarrollar en los alumnos habilidades básicas como la observación, la reflexión, la identificación, la abstracción, la validación y la inferencia lógica.

Por ejemplo, según Fabert & Grenier (2011), podemos distinguir en el dominio científico, dos tipos de razonamiento: por inducción y por deducción. En el ámbito de las ciencias experimentales, el razonamiento por inducción es suficiente en sí mismo si el método empleado es suficientemente riguroso. En matemáticas, el razonamiento inductivo solo se concibe, en general, como una primera etapa, que conduce a una conjetura. La demostración de esta conjetura se realiza, por un razonamiento deductivo o se invalida por la producción de un contraejemplo.

El presente trabajo se inscribe en el marco de una reflexión más amplia acerca del razonamiento matemático y de la demostración en contexto escolar asumiendo la posición de la pertinencia de su introducción en niveles elementales. Específicamente, se pretende mostrar la factibilidad de la introducción, en el nivel secundaria, de una regla de razonamiento matemático: el uso de contraejemplos para refutar afirmaciones falsas

Algunas investigaciones relativas al razonamiento matemático y al contraejemplo en la enseñanza

Se han desarrollado diversas investigaciones respecto a la formación del razonamiento matemático en estudiantes de diferentes niveles, en particular los trabajos desarrollados por el grupo de investigación *Logique de la CII-Lycée* en el cual participan investigadores de los institutos de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas

(IREM, por sus siglas en francés) de Brest, Grenoble, Marsella, Montpellier, Paris 7, quienes han realizado estudios acerca de la lógica y el razonamiento matemático para la enseñanza en secundaria y bachillerato.

Al seno de este grupo de investigación han constatado que no existe "saber de referencia" para la enseñanza de la lógica y del razonamiento matemático en la enseñanza secundaria, ni en los programas de estudio ni en los libros de texto, lo poco que existe en ese sentido es muy parcial, confuso y no es muy utilizable por los profesores, no obstante, Grenier (2015) sostiene que:

- Argumentaciones, razonamientos y pruebas matemáticas deben respetar reglas específicas.
- Un enunciado, una conjetura, una hipótesis, una proposición tienen un estatus y escrituras precisas, contienen a menudo variables y cuantificadores

En este grupo de investigación, han realizado trabajos acerca de la presencia de la implicación, el trabajo con cuantificadores y las reglas de inferencia a nivel secundaria (Deloustal & Grenier, 2001).

El contraejemplo

Según Arsac & Mante (1997), el razonamiento matemático permite validar o refutar resultados tanto en el ámbito científico como en el escolar. Los resultados se validan mediante la demostración y pueden ser refutados mediante contraejemplos los cuales también permiten criticar afirmaciones contenidas en una argumentación. Tradicionalmente, estos procedimientos son propios, en mayor medida de la matemática en el nivel superior y en menor medida en el nivel medio superior y están ausentes en los niveles básicos.

En este sentido, varios investigadores han analizado diferentes aspectos acerca del papel del contraejemplo en la enseñanza da la matemática (Klymchuk, 2009; Yopp, 2013; Locia, 2000; Morales, Locia, Mederos, Ramírez & Sigarreta, 2018). Al respecto Klymchuk, (2009) recomienda el uso del contraejemplo como estrategia pedagógica para:

- Profundizar en la comprensión conceptual
- Reducir o eliminar errores conceptuales comunes
- Mejorar las habilidades del pensamiento crítico
- Hacer que el aprendizaje sea más activo y creativo

Del mismo modo, un reporte reciente de Rina Zaskis (2018) muestra que la utilización de contraejemplos puede surgir de manera natural cuando los estudiantes exponen sus argumentos respecto a la búsqueda de la solución a un problema.

Todos estos trabajos están enfocados en la enseñanza de la matemática del nivel superior. Sin embargo, según Duvert (1996), es posible empezar a desarrollar los procesos de validación y refutación, desde etapas muy tempranas lo que contribuye a mejorar los logros de los estudiantes en este dominio comenzando la iniciación desde primero de secundaria (e incluso antes) y graduando más eficazmente la enseñanza de las competencias pretendidas, sin olvidar todo lo que respecta a lazos entre el lenguaje y el razonamiento.

En particular, Duvert propone desarrollar la noción de contraejemplo desde el nivel secundaria, por las siguientes razones:

- Es una “entrada” posible para dar más sentido a la demostración matemática: se puede decir en efecto que una conjetura será válida cuando se esté seguro de que no tiene contraejemplos; es el carácter fastidioso de la búsqueda de todas las posibilidades lo que puede hacer captar la utilidad de la demostración en el sentido clásico del término.
- Es una buena ocasión de puntualizar las diferencias entre el razonamiento matemático y la “lógica común”: en efecto, en la

vida cotidiana, el hecho de tener un contraejemplo no es suficiente, en general, para probar que una afirmación es falsa: lo testimonia la expresión bien conocida "es la excepción que confirma la regla".

- La noción de contraejemplo se presta bien a un trabajo interdisciplinario.
- Es una noción que los alumnos asimilan de una manera relativamente fácil, o, al menos, relativamente rápido. Aún más, hace falta (como en todo el resto) trabajar en ello específicamente y guardar en la mente que no es tan evidente para un cierto número de alumnos.

Objetivo

Este trabajo se orienta a la aportación de elementos para introducir, en el contexto escolar, la utilización de contraejemplos en la enseñanza de la matemática en el nivel secundaria. Compartimos la hipótesis de Duvert en el sentido de que es posible introducir la noción de contraejemplo en este nivel.

Nuestro objetivo es: diseñar e implementar una secuencia de aprendizaje que propicie el uso de los contraejemplos por parte de los estudiantes de secundaria.

De manera más amplia, se trata de familiarizar a los estudiantes de secundaria con ciertas reglas del razonamiento matemático como las siguientes:

- un enunciado es o bien verdadero o bien es falso; un contraejemplo es suficiente para invalidar un enunciado;
- muchos ejemplos que verifican un enunciado no son suficientes para probar que es verdadero;

- para debatir nos apoyamos sobre un cierto número de propiedades o definiciones claramente enunciadas sobre las cuales nos hemos puesto previamente de acuerdo;
- una constatación sobre un dibujo no es suficiente para probar que un enunciado de geometría es verdadero.

Consideramos que, en secundaria, como en otros niveles, es posible encontrar afirmaciones falsas que los estudiantes consideran verdaderas, cuya falsedad puede ponerse en evidencia con un contraejemplo. Nos referimos a situaciones que se presentan a menudo en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. A continuación, se enlistan 5 afirmaciones, que de hecho son falsas y un contraejemplo permite probarlo.

- Los números que terminan en 3 son números primos
- Un número cuya suma de las cifras es divisible por 7, es divisible por 7.
- $2^3 = 2000$
- Si; $1^1 = 1$ y $2^2 = 4$ entonces 3^3 =9.
- Si; $n^2 = 9$, entonces $n = 3$.
- No existen números consecutivos a, b, c tales que: $a^2 + b^2 = c^2$ (esta es una de las afirmaciones que se trata en la secuencia didáctica).

Elementos teóricos

Teoría de situaciones didácticas

De acuerdo con Brousseau (1986) dentro de esta teoría el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de obstáculos y desequilibrios, de tal manera que cuando el alumno logra superar dichos obstáculos es cuando se apropia del conocimiento en juego, y es el profesor quien debe de facilitar el medio para que el alumno consiga superar los obstáculos. Ahora bien, con respecto a las situaciones a-didácticas, en Maldonado, Rodriguez y Santana (2009) se definen como las interacciones del alumno con el medio de aprendizaje y las describe de la siguiente manera:

Situación de Acción: Es cuando el alumno se enfrenta al problema y trata de buscar solución a este sin la intervención del maestro. El problema que se le plantea debe despertar el interés en el alumno, el tipo de pregunta debe estar bien formulada, de tal manera que provoque en él algún esfuerzo para resolverla.

Situación de Formulación: El alumno comunica las formulaciones resultado de las acciones realizadas sobre el medio, de tal manera que se enfrente con las formulaciones de sus compañeros, es en esta etapa donde se puede presentar el debate científico que, según Navarrete (2008), es una estrategia didáctica propiciadora del uso del contraejemplo en el aula.

Situación de Validación: Es donde el alumno después de haber comunicado sus formulaciones demuestra la pertinencia de ellas y se discute con el profesor sobre el trabajo realizado para verificar si es correcto, cuando el alumno pone en común sus ideas conclusiones o conjeturas, es natural que el resto de la clase haga indagaciones respecto a lo que se expone, esto naturalmente pondrá las conclusiones en el filtro del contraejemplo.

Situación de institucionalización: en la cual el profesor interviene con el fin de que los alumnos asuman la significación socialmente establecida del saber en juego que ha sido construido por ellos en las situaciones de acción, formulación y validación.

El debate científico en cursos de matemáticas

Legrand (1996) observa la teoría de situaciones didácticas y detecta que la resolución de ejercicios y problemas no siempre es suficiente para que el alumno asimile la teoría matemática, (Navarrete, 2008) y propone lo que él llama "el debate científico en cursos de matemáticas" como una estrategia para transformar el aula en una mini-comunidad científica (Brousseau, 1986) donde el alumno-matemático pueda exigir la producción de contraejemplos precisos y proporcionar argumentos reconocidos por todos. El objetivo de un debate es plantear, exponer y conocer diferentes posturas y argumentaciones sobre un tema, con la finalidad de que pueda llegarse a una conclusión. En este sentido, los debates deben ser plurales.

El profesor que pone en práctica esta técnica para abordar un tema en la clase de matemáticas, deberá tomar sus precauciones, siendo cuidadoso a la hora de intervenir, así como mesurado al momento de validar los argumentos propuestos por una parte del grupo que sostiene el debate, esto con el fin de no dejar que se distinga algún tipo de preferencia respecto a los debatientes, ya que de ser así sin duda se anula o menguan las ganas de seguir buscando recursos para "ganar el debate".

Consideraciones metodológicas

Para llevar a cabo nuestro objetivo, realizamos las siguientes actividades:

- Revisión de trabajos de investigación relativos al razonamiento matemático en el contexto escolar
- Revisión de los programas de matemáticas y de los libros de texto de secundaria, para identificar las partes del curso, susceptibles de introducir situaciones de aprendizaje en los que el contraejemplo juegue un papel importante.
- Diseño de las situaciones de aprendizaje.
- Implementación de una secuencia didáctica

Elaboración de la secuencia de aprendizaje

Para la elaboración de la secuencia se eligió el tema; ternas pitagóricas. Aunque no es un contenido del plan de estudios, las ternas pitagóricas permiten construir el teorema de Pitágoras desde un trabajo puramente aritmético. La secuencia debe contener los elementos necesarios para que los estudiantes pongan en juego su razonamiento matemático y que haga posible la argumentación de los alumnos pero que en la argumentación se propicie el uso de contraejemplos.

La situación de aprendizaje consiste en una serie de actividades organizadas con la estructura de las situaciones didácticas de Guy Brousseau (1986), donde los estudiantes resuelven actividades referentes al contenido matemático seleccionado. Se espera que haya conjeturas suficientes para debatir, presentando argumentos a favor o en contra de cada conjetura y el contraejemplo será la herramienta fundamental para que dichas conjeturas sean validadas o refutadas.

Primera exploración de la secuencia de aprendizaje

Participantes y contexto

Nos ubicamos en la escuela secundaria "Niño artillero" en una zona suburbana de la ciudad de Acapulco Gro. México, con un cierto grado de marginación, debido a que los servicios públicos como luz, agua, drenaje y pavimentación no son del todo eficientes sumado a que las familias de donde provienen los estudiantes son en su mayoría de escasos recursos.

El grupo destinado a desarrollar la secuencia es el 3° "C" el cual está conformado por 27 alumnos. Una estancia de tres meses realizada con ellos, nos permitió darnos cuenta de que un gran porcentaje llega al tercer grado con un rezago notable en matemáticas, debido a que:

- Se les dificulta realizar cálculos mentales.
- No recuerdan las tablas de multiplicar.
- Presentan dificultades con el algoritmo de la multiplicación y la división.

Cronograma de actividades respecto a la secuencia

La actividad es implementada los días 03 y 04 de diciembre del 2019 como se resume en la Tabla 1.

Tabla 1:
Puesta en escena

Día y horario	Actividad
03 de diciembre: 07:30-09:10 am.	Viaje a las estrellas: 1.-Números figurados triangulares y cuadrados. 2.-Números naturales y números cuadrados.
04 de diciembre: 10:30 am.-12:00	3.- Exploración en la tabla de números cuadrados para encontrar ternas. 4.-Formulación de conjeturas para generar ternas pitagóricas.

Recolección de datos y su análisis

La recolección de datos se hizo mediante grabación de video y las producciones escritas de los seis equipos de estudiantes que se formaron para desarrollar las actividades.

Figura 1.

El profesor explica el modo de trabajo en que se deben desarrollar las actividades

Resultados de la aplicación del diseño de aprendizaje "Descubriendo maravillas matemáticas"

Se reporta solo parte de las producciones del equipo 1 y algunas comparaciones con los demás equipos utilizando las abreviaciones; expectativa (Ex.), respuesta obtenida (R.) y observaciones (Obs.).

1. Dibujen los siguientes 3 números triangulares (utilizando puntos) y escriban los valores numéricos que faltan.

Ex. Se espera que se guíen por la forma triangular del arreglo de estrellas y que sus dibujos tengan forma triangular permitiéndoles observar un patrón numérico.

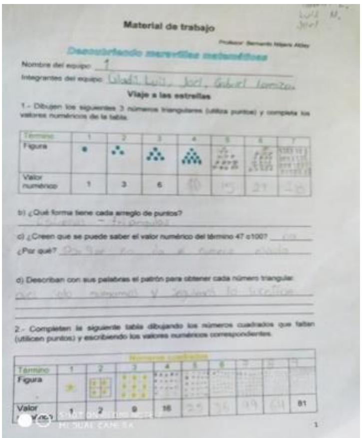
R: Sólo para el primer término siguieron el patrón geométrico, para el segundo y el tercer término pusieron primero los valores numéricos y después rellenaron con las estrellas necesarias el espacio donde debía ser dibujada la figura triangular.

Obs. Para esta primera actividad, se orientan más por la idea numérica que por ordenar las estrellas (puntos) en forma triangular.

Los valores numéricos son correctos.

Figura 2.

La primera hoja del material de trabajo muestra la producción del equipo 1



2.- Observen las columnas de la siguiente tabla y escriban algunas características que crean relevantes.

Figura. 3:

Tabla pensada para que los algunos observen patrones

		Números naturales							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ex. Se espera que los estudiantes noten que cada número de la columna termina con la misma unidad que comienza en la primera fila.

R. que van en números de uno en uno, las columnas van siguiendo un orden.

Obs. Los alumnos observan un orden, pero no lo describen completamente

a) Observen la tabla anterior y encuentren tres números consecutivos de tal modo que el mayor de ellos es igual a la suma de los dos menores.

Ex. 1,2,3

R. 1,2,3 porque la suma de 1+2=3

Obs. Todos los equipos llegan a la respuesta esperada, más aún, justifican su respuesta, en esta actividad se suscita un caso particular que más adelante se relata.

b) ¿Creen que existen otros tres números que satisfacen las condiciones anteriores? ¿Por qué?

Ex. Se espera que conteste de forma natural: Sí, porque hay muchos números.

R. No, cuando se suman se hacen más grandes.

R. equipo 4: No, porque al momento de sumarlos se pasan.

Obs. Todos los equipos corroboran que no hay más ternas y lo justifican, sin embargo, les tomo unos minutos llegar a esa conclusión, NO contestaron de forma natural si no que la pregunta detonó una reflexión para no contestar ligeramente.

c) Escriban una expresión matemática que represente la situación del inciso a) puede ser una ecuación.

Ex. $x + (x + 1) = x + 2$

➔ $2x = x + 2 - 1$

➔ $2x - x = 1$

➔ $x = 1$

R: Si x=1 entonces x+1=2 y x+2=3, por lo tanto, los números buscados son 1,2, 3 y se comprueba que 1+2=3.

Obs. Los equipos no formularon la ecuación, algunos no recuerdan que es una ecuación.

d) Comparen sus respuestas con otro equipo y contesten

Ex. Se espera que contrasten lo que pensaban sobre si había más ternas y que mediante la solución de la ecuación lograrán corroborar que no hay más.

Obs. No compararon sus respuestas debido a que sonó el timbre y todos tenían prisa por salir de la clase.

e) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación que resolvieron?

Ex. Solo una.

R: Muchas.

Obs. Tal parece que los equipos no tienen en claro la definición requerida de ecuación de primer grado.

f) ¿Piensan que la ecuación que resolvieron puede tener más soluciones?

Ex. No porque una ecuación de primer grado con una incógnita solo tiene una solución.

R. Si

Obs. Los equipos 5 y 3 no contestan, mientras que los equipos 1,2, 4 y 6 contestan que si. Nuevamente no recuerdan la definición.

g) Escriban una conclusión respecto a lo que contestaron en el inciso b) y lo que comprobaron en el c)

Ex. Primero se pensaba que podía haber más terna de números consecutivos que cumplieran que el mayor era la suma de los dos menores, pero al resolver la ecuación nos dimos cuenta de que no es así y que solo 1,2 y 3 satisfacen las dos condiciones.

R. Ya no hay

Obs. Solo los equipos 1 y 4 contestaron y coinciden que la solución es única

Un caso particular

Nos interesamos en este caso, puesto que evidentemente se presenta el contraejemplo como una partícula de conocimiento que detona de alguna manera natural un nuevo tipo de razonamiento y que una estudiante emplea para aleccionar a un par.

La situación comienza cuando Gabriel del equipo 2, menciona que no comprende la instrucción 1.a) (*Observen la tabla anterior y encuentren tres números consecutivos de tal modo que el mayor de ellos es igual a la suma de los dos menores.)* del apartado números naturales y números cuadrados por lo que se genera el siguiente diálogo.

[Gabriel]- Profe, no le entiendo, está difícil
[Bernardo]- ¿Dónde?
[Gabriel]- Aquí, (señalando la instrucción 1. a) del apartado Números naturales y números cuadrados)
[Bernardo]-Lee otra vez, pero con calma.
[Gabriel]- ¿Podemos preguntar?
[Bernardo]. Adelante
- *Gabriel y Sandra, se levantan y se dirigen hacia el equipo 1, con Gladis.*
[Sandra]- Gladis explícame aquí, (Sandra señala la instrucción)
[Gladis]- Mira, vamos a leer: 1. a) Observen la tabla anterior y encuentren tres números consecutivos de tal modo que el mayor de ellos es igual a la suma de los dos menores.
[Gladis]-Por ejemplo: fíjate en el 51, 52 y 53.
[Sandra]- aja
[Gladis]- ¿son consecutivos?, si ¿verdad?, pero si sumas 51 más 52 no te resulta 53 ¿verdad?
[Sandra]- ¡NO!
[Gladis]-Ya viste, entonces estos tres números no son.
[Sandra]- ¿Cómo?, ¿cómo?
[Gladis]- Sí, mira, vuelve a leer
[Sandra]- 1. a) Observen la tabla anterior y encuentren tres números consecutivos…
[Gladis]- fíjate, deben ser consecutivos, o sea seguidos, lee…

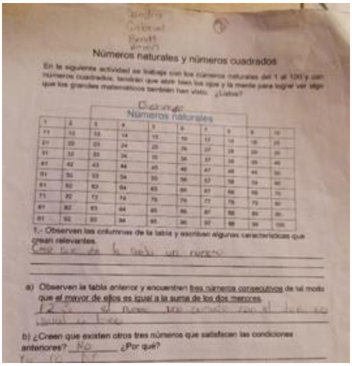
[Sandra]- de tal modo que el mayor de ellos es igual a la suma de los dos menores.
[Gladis]- quiere decir que si sumas los más chicos te debe salir el más grande
[Gladis]-Fíjate otra vez: 23,24 y 25 son consecutivos, pero 23 más 24 no dan 25, entonces estos tres no son.
[Sandra]- ¡Ah!… y ¿sí hay?
[Gladis]- ¡Sí! Búscale
[Sandra]- Sale
-Sandra y Gabriel se retiran a su lugar y hallan la respuesta en un tiempo breve.

Hasta este punto las actividades de la secuencia se pudieron desarrollar de manera regular y en adelante el grupo perdió el interés un tanto por la dificultad y otro porque se aproximaban las vacaciones de diciembre y tenían esas inquietudes más que estudiar.

Sin embargo, con la experiencia y los resultados tenemos elementos para retomar la actividad en el apartado que consideramos fundamental para observar la formulación de conjeturas y consecuentemente contraejemplos que permitan refutarlas.

Figura 4.

El equipo 2 pudo resolver el inciso 1. a) gracias al apoyo que le dio el equipo 1



Secuencia rediseñada

Para una segunda exploración se consideran las siguientes actividades

1.- Completen la tabla de números cuadrados y resuelvan las cuestiones.

a) Con colores diferentes, hagan marcas a las características que noten en los números de la tabla y escriban algunas conclusiones.

Figura 5.

Tabla de números cuadrados para que los estudiantes notes patrones y formulen conjeturas

		Números cuadrados							
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
441	484		576			729		841	900
	1024		1156	1225	1296	1369		1521	1600
	1764		1936	2025	2116	2209		2401	2500
	2704	2809	2916			3249		3481	3600
3721		3969	4096			4489	4624		4900
5041		5329				5929	6084		6400
6561	6724	6889					7744		
8281	8464	8649	8836	9025	9216		9604	9801	

Ex. Se espera que noten patrones como; en la columna 1 todos los números terminan en 1, en la columna 2, terminan en 4, en la columna 3 terminan en 9 etc…

a) Identifiquen en la tabla de números cuadrados, tres números, tales que el mayor resulta al sumar los otros dos.

Ex. Se espera que realicen la búsqueda y que al hallar una terna piensen que no hay más, como pasó en la tabla de números naturales de la primera exploración.

b) ¿Cuáles son esos tres números? Justifiquen su respuesta

Ex.9,16,25 y porque 9+16=25, --- 36,64,100 puede ser otra respuesta.

c) ¿Cuáles son las raíces de esos tres números?

Ex. 3,4,5, o 6,8,10 se espera que noten que los primeros son números consecutivos y los otros son múltiplos de los primeros.

d) ¿Creen que hay más ternas de ese tipo? ¿Por qué?

Ex. Se espera que por lo menos un equipo crea que si hay más ternas y los otros que no.

e) ¿Qué características deben cumplir las raíces de este tipo de ternas numéricas?

Ex. Son números consecutivos, son múltiplos de 3,4,5, son dos impares y uno par, los tres son pares…

Obs. El profesor debe motivar a que a lo menos un equipo encuentre más de una terna u otra diferente

f) Comparen sus respuestas con otro equipo y escriban sus conclusiones además tomen acuerdos para designar un nombre a este tipo de ternas numéricas.

Ex. Se llaman "ternas cuadradas" y podemos ver que hay más de una, sus raíces son consecutivas en un caso casos.

Obs. Para poder instaurar el debate, acerca de las características de los números en cuestión es necesario que se hayan encontrado ternas diferentes en el inciso anterior. En el transcurso del debate el profesor propone sistematizar la búsqueda con la siguiente actividad.

2.- Definan una regla para encontrar ternas y elaboren una tabla con todas las ternas que hallen con esa regla.

Ex. Estrategia 1: las ternas estan definidas por múltiplos de la terna (3,4,5)

Terna	Raíces
(9,16,25)	(3,4,5)
(36,64,100)	(6,8,10)
(81,144,225)	(9,12,15)
(144,256,400)	(12,16,20)

Estrategia 2: las ternas están definidas por dos impares y uno par.

Terna	Raíces
(9,16,25)	(3,4,5)
(81,144,225)	(9,12,15)
(25,144,169)	(5,12,13)

Estrategia 3: las ternas están definidas por múltiplos de la terna (6,8,10)

Terna	Raíces
(36,64,100)	(6,8,10)
(144,256,400)	(12,16,20)
(324,576,900)	(18,24,30)

Obs. Las afirmaciones y enunciados que puedan surgir al intentar describir las ternas podrán ser refutadas con un contraejemplo porque de hecho la regla no es nada trivial y el grupo debe estar atento para criticar en el mejor sentido el trabajo de sus compañeros

En resumen, el trabajo con las ternas pitagóricas se hará en las siguientes etapas:

- Una etapa de búsqueda de ternas pitagóricas cuyos términos se encuentren entre 1 y 100. Para ello se construye una tabla con los primeros cien números naturales elevados al cuadrado y se procede por ensayo y error. Los estudiantes pueden utilizar una calculadora o generar estrategias como por ejemplo, el hecho de que los cuadrados de estos números solo terminan en 0, 1, 4, 5 6 o 9, por lo que, una vez tomados dos números de la tabla se suman sus respectivos últimos dígitos, si no resulta un dígito de la lista la pareja es desechada pues con seguridad no será un cuadrado perfecto. En otro caso, se completa la suma para comprobar si es un cuadrado perfecto. En caso de que sí, se tiene una terna pitagórica.
- Una vez que se han encontrado todas las ternas pitagóricas en este intervalo, se busca clasificarlas según sus propiedades dando lugar a conjeturas como las siguientes:
  - Algunas de ellas serán múltiplos de otras
  - Algunas estarán compuestas de 3 números pares
  - Algunas estarán compuestas de dos impares y uno par
  - Algunas tendrán al menos dos números naturales consecutivos (en particular, los dos últimos).
  - Con cada número primo mayor que 2, se puede iniciar una terna pitagórica.
  - Con cada número impar se puede iniciar una terna pitagórica, la cual puede expresarse de manera algebraica como $(2k+1, 2k^2+2k, 2k^2+2k+1)$ con $k \in \mathbb{N}$.

Estas reglas generales o conjeturas sobre las ternas pitagóricas podrán ser sujetas a la crítica mediante contrajemplos pues se garantiza que en la tabla hay un buen número de ejemplos y contraejemplos a los cuales los estudiantes pueden recurrir al momento de criticar o defender sus posiciones sobre una determinada afirmación.

Corresponde al profesor la institucionalización del conocimiento, si las condiciones lo permiten, se puede intentar construir la fórmula general para obtener ternas pitagóricas:$(m^2 - n^2, 2mn,\ m^2 + n^2)$ con $m, n \in \mathbb{N}$ y por supuesto se debe aterrizar el nuevo conocimiento como un caso particular del llamado teorema de Pitágoras.

Conclusiones

Con la primera exploración que se realizó se pudieron obtener indicios de que los alumnos de secundaria sí son capaces de formular contraejemplos no obstante hay limitantes que impidieron la culminación del diseño, en cambio ganamos experiencia con la que hemos tomado medidas para asegurar el nivel de partida y poner en práctica los elementos necesarios del debate científico en la clase de matemáticas. La nueva secuencia, enfatiza más el trabajo con las ternas pitagóricas y la producción de conjeturas por parte de los estudiantes, algunas de las cuales podrán ser ilustradas con ejemplos o criticadas con contraejemplos, los cuales podrán ser tomados de la lista de ternas generada en la actividad. Es claro que la conducción que haga el profesor de la sesión será crucial para lograr el objetivo del presente trabajo.

Referencias bibliográficas

Arsac, & Mante, M (1997). Situations d'initiations au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathemtics, 33*(1): 247-280.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2) 33–115. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Deloustal, V., Grenier, D. (2001). L'implication dans le raisonnement mathématique: Etat des lieux dans l'enseignement en France et conceptions d'étudiants. *Learning in mathematics and Science and Educational Technology*, A. Gagatsis editeur, Intercollege press Cyprus, 2001.

Duvert, R. (1996). La notion de contre-exemple au collége. *REPERES-IREM*. N° 22, 5-12.

Fabert, Ch. & Grenier, D. (2011), Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique, *Petit x 87*, 31-52.

Grenier, D. (2015) De la nécessité de définir les notions de Logique au Lycée, *Repères IREM n°100*, 65-83.

Klymchuk, S. (2009). Using Counter-Example to Enhance Learners' Understanding of Undergraduate Mathematics. *Good Practice Publication Grants New Zealand*: Ako Aotearoa National Centre on Tertiary Teaching Excellence (Online)

Legrand, M. (1996). *El Debate científico en clase de matemáticas. La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*. Frouard (Francia): Ed. Topiques.

Locia, E. (2000). *Les contre-exemples dans l'enseignement des mathematiques.* Tesis doctoral no publicada, Universidad Paul Sebatier. Touluse, Francia.

Morales, A., Locia, E., Mederos E., Ramírez, M. & Sigarreta, J. M. (2018). The Theoretical didactic approach to the counterexample in mathematics. *International Journal of Research in Education Methodology, 9* (1), 1510-1517.

Maldonado, E., Rodriguez, F. & Santana, S. (2009) Una propuesta para abordar el proceso de transición grados →radianes, En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22. (pp. 693-703). Clame.

SEP. (2017). *Plan y Programa de estudio para las Matemáticas de la Educación Secundaria*. México. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf ISBN: 978-607-8558-23-0.

Yopp, D., A. (May 2013), Counterexamples as Starting Points for Reasoning and Sense Making. *The Mathematics Teacher 106*(9), 674-679. National Council of Teachers of Mathematics

Zaskis, R. (2018). Dialogues on Numbers: Script-Writing as Approximation of Practice, Invited Lectures In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs*, (769-786) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_4

Trayectorias de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria. El caso para la generalización de patrones[5]

Daniel González Jiménez, Hermes Nolasco Hesiquio

gonzalezxdan@gmail.com

La investigación internacional en las últimas décadas ha mostrado interés en la práctica profesional del docente, particularmente se ha centrado ampliamente al estudio de la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) en el aula. En este sentido, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje proporcionan un marco conceptual a profesores, a lo hora de diseñar su planeación didáctica en el contexto de la clase. El objetivo de este trabajo es construir una THA y evaluar su desarrollo en la comprensión de la generalización de patrones. Los datos del estudio proceden de sesiones de matemáticas en un aula de Educación Secundaria (12-15 años). Los resultados muestran que los alumnos utilizan argumentos que forman parte del sentido numérico, sin lograr representar algebraicamente la generalización de patrones.

Palabras Clave: Trayectoria de aprendizaje, generalización de patrones, pensamiento algebraico, práctica profesional.

Introducción

Los contenidos que se estudian en la Educación Secundaria se han organizado en tres ejes temáticos: sentido numérico y pensamiento

[5] Joachin, I. y Nolasco, H. (2020). Estudio sobre el proceso de la argumentación matemática en el Bachillerato: El caso de la Semejanza. En M. Méndez, M. Ferrari & N. Marquina (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 1* (pp. 47-70). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México.

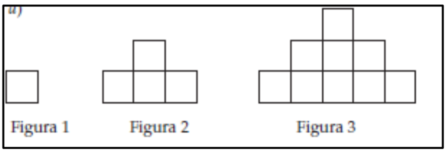
algebraico; forma, espacio y medida y, manejo de la información. El tema de “patrones y ecuaciones” que nos ocupa está ubicado en el Bloque IV de tercer grado, y es parte del eje Sentido numérico y pensamiento algebraico (SEP, 2011).

Los contenidos de sucesiones y patrones tienen como objetivo que el alumno obtenga una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión. Así mismo se espera que el alumno aprenda a utilizar en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir cualquier término arbitrario de una sucesión. Las competencias matemáticas que se favorecen son: resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados; y manejar técnicas eficientemente.

Por otra parte, las recomendaciones didácticas para el profesor en relación con la enseñanza de "sucesiones numéricas" es que en primera instancia proponga situaciones sencillas, a partir de sucesiones de números y figuras para que los alumnos puedan encontrar regularidades o patrones y después que puedan hallar algunos de los términos (por ejemplo, Figura 1).

Figura 1:

Ejemplo de situación sencilla

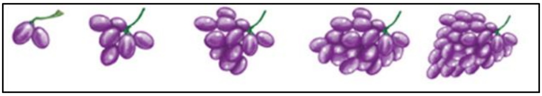


Nota: Extraído del libro de texto, Matemáticas 2 (Trigueros et al, 2016)

Consecuentemente, en el libro de texto del alumno, en el inicio del bloque IV, del tema Patrones y ecuaciones, cuyo subtema de la secuencia 1 es Sucesiones numéricas y figurativas, localizamos el contenido matemático que nos interesa; en el cual se propone que el profesor presente sucesiones figurativas para despertar el interés. Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos al final del tema puedan determinar una expresión general cuadrática, para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias. Las actividades que se proponen para el contenido que nos ocupa están orientadas en esa dirección y propósito (Figura 2).

Figura 2:

Ejemplo de expresión general cuadrática



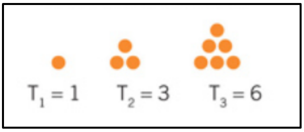
Nota: Extraído del libro Matemáticas 2 (Trigueros et al, 2016, p. 170)

Como principio, les dan la expresión algebraica y a partir de ella se construyen los primeros términos que se concentran en una tabla, esa expresión le serviría para después encontrar el lugar que ocupa en la sucesión, cuando el único dato que tienen es el número de la serie o bien el lugar.

Otro aspecto que los estudiantes podrán representar algebraicamente es la sucesión con figuras, en el siguiente caso con triángulos añadidos, para ello se construyen los primeros tres triángulos, a partir del cual se añade su base hacia la derecha y su altura hacia arriba como se ve en la Figura 3.

Figura 3:

Sucesión de figuras



Nota; Extraído del libro de texto, Matemáticas 2, (Trigueros et al, 2016, p. 175)

Así mismo, se les plantea una tabla que relaciona dos variables, "racimo" y "cantidad de uvas", donde el uso del método de las diferencias es importante para lograr resolver el problema, y a la vez el alumno ensayará el método. Además de un último ejercicio, apoyado de una gráfica en el que de igual forma se echa mano del método para obtener una ecuación (ver figura 4).

Figura 4:

Relación de variables contrastado con el método de las diferencias

Racimo	1	2	3	4	5
Cantidad de uvas	2		12		30
Primeras diferencias	6 − 2 = ___	12 − 6 = 6	20 − 12 = ___	30 − 20 = ___	
Segundas diferencias		6 − 4 = ___	8 − 6 = ___	10 − 8 = ___	

Con esto se pretende que el alumno, para dar respuestas a los cuestionamientos que se le plantean, se debe de auxiliar de una tabla numérica que se les da, en la que se tendrá que realizar una gráfica que permitan interpretar el fenómeno y a partir del método de las primeras diferencias construir una ecuación. El fenómeno propuesto les permite transitar por 3 tipos de representaciones: de las tablas numéricas a la representación gráfica y de ésta, a la notación algebraica.

En cuanto a las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, se perciben dos usos claramente diferenciados: como herramienta de investigación y como herramienta para la planificación. El trabajo de Steffe (2003), centran su atención en la construcción e interpretación de fracciones proporcionales por dos niños; Lesh y Yoon (2004) y Clements, Wilson y Sarama (2004) son trabajos esencialmente de investigación en los que se explora la trayectoria hipotética de aprendizaje para temas concretos. Consecuentemente, los trabajos de Gravemeijer (2004) y, Simon y Tzur (2004), aunque exploran también trayectorias hipotéticas de aprendizaje, se preocupan con mayor énfasis por su uso en la planificación del profesor.

Así en etapas tempranas, Clements y Sarama (2010) parten del hecho de que la planificación de la enseñanza debería guiarse por los objetivos de aprendizaje que se quieren alcanzar; sugiriendo como resultado que en la planificación de la enseñanza se pueden establecer cuatro preguntas directrices : ¿Cuáles objetivos se deben establecer?, ¿por dónde comenzar?, ¿cómo sabemos dónde ir después? cómo podemos llegar ahí?.

Por ejemplo, Burgués y Gimenez (2006) desarrollan un trabajo de trayectorias hipotéticas de formación inicial (Trhifi), donde reinterpretan y conciben la THA como un instrumento para el análisis del desarrollo profesional en la formación de futuros docentes de primaria; dicha investigación se desarrolló por medio del estudio de caso. En tal se encontró que el conjunto de las trayectorias hipotéticas de formación inicial pueden ser organizadas en macrociclos y microciclos.

En este sentido, Gómez y Lupiáñez (2005) en su trabajo "Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria" tiene como fin identificar las diferentes interpretaciones de la noción de trayectoria en profesores en formación a partir de indagar en relación hay entre la actividad diaria del profesor y la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje; así como también parte del análisis de las capacidades que debe tener el profesor para ser capaz de reinterpretar, como en el hecho, de desarrollar e incidir en esas capacidades en profesores en formación.

En una investigación posterior, Gómez et al. (2014) aborda los caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas, en la que pretende identificar la manera en la que profesor aborda la planificación de la enseñanza de los objetivos, tareas y evaluación de clase; con el fin de proponer un concepto pedagógico, los *caminos de aprendizaje* de una tarea, con el que es posible caracterizar un objetivo de aprendizaje y, al hacerlo, establecer cómo una tarea contribuye a ese objetivo de aprendizaje y a evaluar la actuación de escolares durante la instrucción. Con esto introduce los conceptos de grafo de un objetivo y el de, secuencia de capacidades y errores.

Por su parte Martínez, Torregrosa y Llinares (2015) centran su trabajo en una propuestas de enseñanza centradas en una trayectoria de aprendizaje de un contenido matemático usando materiales didácticos; partiendo de dos preguntas: ¿cuál es el conocimiento pertinente que debe conocer el maestro? y ¿cuáles deberían ser los contextos en los que los estudiantes para profesor puedan aprender a usar este conocimiento en la resolución de problemas profesionales?. En su investigación concluyen que el diseño de actividades de aprendizaje que proponen a los estudiantes para profesor, refleja una manera de entender el aprendizaje y el desarrollo de destrezas para seguir aprendiendo desde su propia práctica, como una manifestación del desarrollo de lo que podemos considerar como competencia docente.

Marco Teórico o Conceptual

Begle et al (1980) opinan que la investigación ha de estar inspirada tanto en la realidad escolar y en los aspectos teóricos; además añaden que girará en torno a una variedad de objetivos. Se considera el constructo teórico de trayectoria de aprendizaje, las progresiones de desarrollo, un modelo de reflexión.

Trayectoria hipotética de aprendizaje

Dada la necesidad de conciliar el trabajo de investigación y la práctica docente, Simon (1995) introduce su modelo de ciclo de enseñanza, el cual era su propuesta para reconstruir la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista y conciliar la visión constructivista del aprendizaje, que requiere que la instrucción tenga en cuenta y se adapte a las actuaciones de los escolares; dentro de este ciclo se encuentra inherente el elemento de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA).

Se puede enfatizar que en las trayectorias de aprendizaje, se identificarán los procesos presentes en la actividad matemática, como son la resolución y planteamiento de problemas innovadores, el razonamiento, el lenguaje y la comunicación, la ejercitación de procedimientos, entre otros.

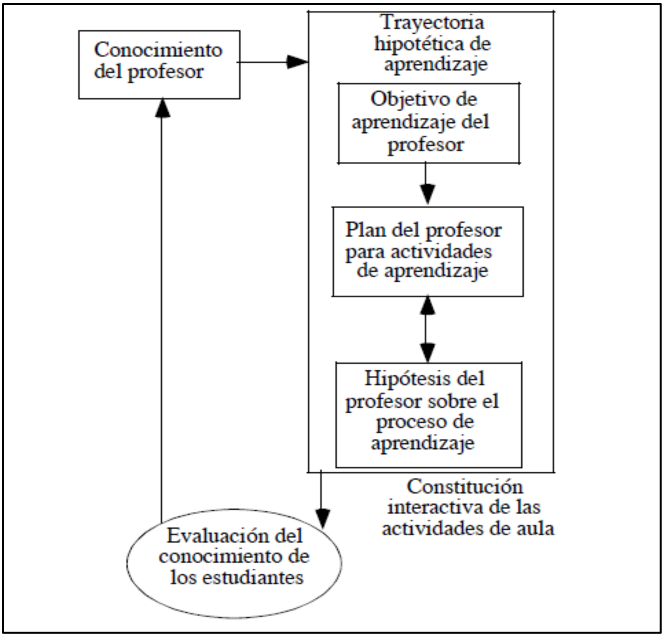
La THA brinda una descripción de los elementos clave para la planeación y ejecución de clases de matemáticas. Aunado a esto, Simon (1995) caracteriza los componentes de una THA, la cual se basa en los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes, los cuales vienen incluidos en el currículo de educación; de las tareas matemáticas que se elaboran o en las sugerencias didácticas, que van acorde a los aprendizajes esperados; y finalmente, las hipótesis que tiene el profesor acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, las cuales están en función de los estilos de aprendizaje y de los contenidos (ver figura 5).

Desde el sentido del proceso de enseñanza aprendizaje Clements y Sarama (2009) afirma que el constructo teórico trayectoria de aprendizaje puede entenderse cómo un camino hipotético por el que los estudiantes de educación primaria pueden progresar en su aprendizaje de un tópico matemático concreto.

Así podemos mencionar que un propósito la THA es establecer una predicción sobre cómo los alumnos pueden aprender un contenido de matemáticas, en función de sus conocimientos previos y en relación con las tareas aplicadas de manera que se produzca el aprendizaje de forma eficaz; lo cual el profesor desarrolla de manera intuitiva en cada sesión de clase.

Figura 5:

Ciclo de la enseñanza de las matemáticas abreviado



Nota: Tomado de Simon, (1995, p. 136)

En cuanto a los objetivos de aprendizaje del profesor Gómez et al. (2014) apuntan que un objetivo de aprendizaje expresa expectativas que involucran conexiones entre los conceptos y procedimientos del tema matemático, los sistemas de representación en que se representan y los fenómenos que organiza. (p. 325). Aunque viene a bien mencionar que, los objetivos de aprendizaje suelen formularse en frases sintéticas cuyo significado parece evidente (Lupiáñez, 2009). Se puede concluir que los objetivos de aprendizaje de la trayectoria vienen dados en función de los ejes y temas del plan y programa de estudio (SEP, 2011).

Para Simon y Tzur (2004) la construcción de una trayectoria de aprendizaje se basa en cuatro supuestos: primero, la generación de un THA se basa en la comprensión del conocimiento actual de los alumnos involucrados; segundo, una THA es un vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares; tercero, las tareas matemáticas proporcionan herramientas para promover el aprendizaje de los particulares. Y finalmente, los conceptos matemáticos son, por lo tanto, una parte clave del proceso de instrucción, debido a la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso; por tal motivo el maestro participa regularmente en la modificación de la THA.

Algunas investigaciones con profesores en formación han constatado que la introducción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje mejora sus habilidades para usar el pensamiento de los escolares (Clements, Sarama, Spitler, Lange y Wolfe, 2011). Se puede añadir que tales trabajos guían las decisiones de instrucción (Wilson, 2009); y mejora su conocimiento del contenido matemático, proporciona mejores modelos del pensamiento del escolar y facilita la incorporación de estos modelos en la enseñanza (Corcoran et al., 2009).

La importancia de las trayectorias de aprendizaje radica, desde la visión de Zapatera (2018), en que éstas permiten diagnosticar la comprensión de los estudiantes y describir el progreso en términos de crecimiento a través de niveles, proporcionan un *feedback* para los maestros y mejoran la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes mediante la adaptación de la instrucción a lo que el estudiante necesita con el fin de progresar hacia el objetivo del aprendizaje.

Generalización de patrones

La generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes del quehacer matemático, esta consiste en pasar del examen de un objeto o de un conjunto limitado de objetos al examen de un conjunto más extenso que lo incluya. Reafirmando esta noción Mason, Burton y Stacey (1992) menciona que las generalizaciones constituyen el verdadero nervio de la matemática y consideran la generalización como la esencia del álgebra y una de las rutas fundamentales hacia ella.

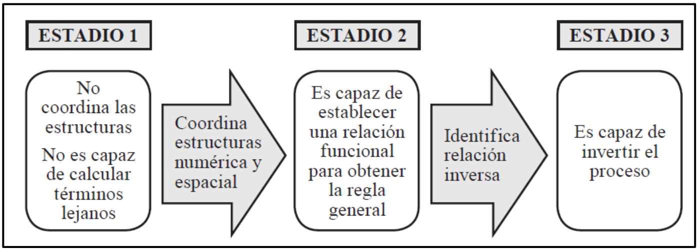
En este sentido Radford (2008) considera que la generalización consiste en pasar de lo particular a lo general y en ver lo general en lo particular; además detalla que la generalización de patrones implica: primero, tomar conciencia de una propiedad común; segundo, generalizar dicha propiedad a todos los términos de la secuencia; y último, usar esa propiedad común para encontrar una regla que permita calcular directamente cualquier término de la secuencia.

Explícito a lo anterior, los estudiantes necesitan identificar una regularidad en la sucesión que relacione la estructura espacial, basada en la distribución espacial de los elementos de las figuras, y la estructura numérica, basada en el número de elementos que componen cada figura (Radford, 2011; Rivera, 2010); posteriormente para encontrar un término lejano, o no especificado, los alumnos deben establecer una relación funcional que asocie la posición de una figura y la cantidad de elementos que la forman (Radford, 2011; Rivera, 2010; Warren, 2005), y finalmente, para determinar la posición de una figura, conocido el número de elementos que la forman, es preciso establecer una relación funcional inversa a la anterior (Warren, 2005).

Fundado en las investigaciones anteriores, Zapatera (2015) caracterizó tres estadios de comprensión en el desarrollo del proceso de generalización de patrones: *estadio 1*, si el estudiante es capaz de continuar la sucesión para términos cercanos identificando el patrón de crecimiento cuantitativo, pero no coordina las estructuras numérica y espacial; *estadio 2*, si el estudiante es capaz de coordinar las estructuras espacial y numérica y de establecer una relación funcional que le permita hallar el número de elementos de cualquier término de la sucesión; y *estadio 3*, si el estudiante además es capaz de invertir dicha relación en casos específicos (Figura 6).

Figura 6:

Estadios del proceso de generalización de patrones



Estrategias de resolución de problemas y descriptores de los niveles de la trayectoria

Las respuestas de los alumnos se analizarán con base en dos criterios: 1) corrección de las respuestas, y 2) estrategias de resolución. Las respuestas se consideran correctas si tanto el procedimiento como la solución son correctos, en cualquier otro caso se consideraron incorrectas. Además de que se pretende caracterizar las estrategias empleadas de acuerdo con la clasificación Callejo y Zapatera (2011) (ver figura 7).

En la figura 7, *directo* son las respuestas que los estudiantes escriben de forma directa sin mostrar evidencias de ningún tipo de estrategia. En las *estrategias aditivas* (EA) el alumno observa el patrón de crecimiento, y realiza el recuento dibujando la figura y contando los elementos (RD), partiendo de la primera figura y sumando el patrón de crecimiento de forma iterada hasta el término requerido (RI) o partiendo de una figura cualquiera y sumando el patrón de crecimiento de forma iterada hasta el término requerido (RR). En las estrategias funcionales (EF) el alumno relaciona las dos variables, la posición de la figura y el número de elementos de ésta. En las *estrategias proporcionales* (EP) el alumno haya, erróneamente, el número de elementos mediante razonamientos proporcionales con multiplicaciones

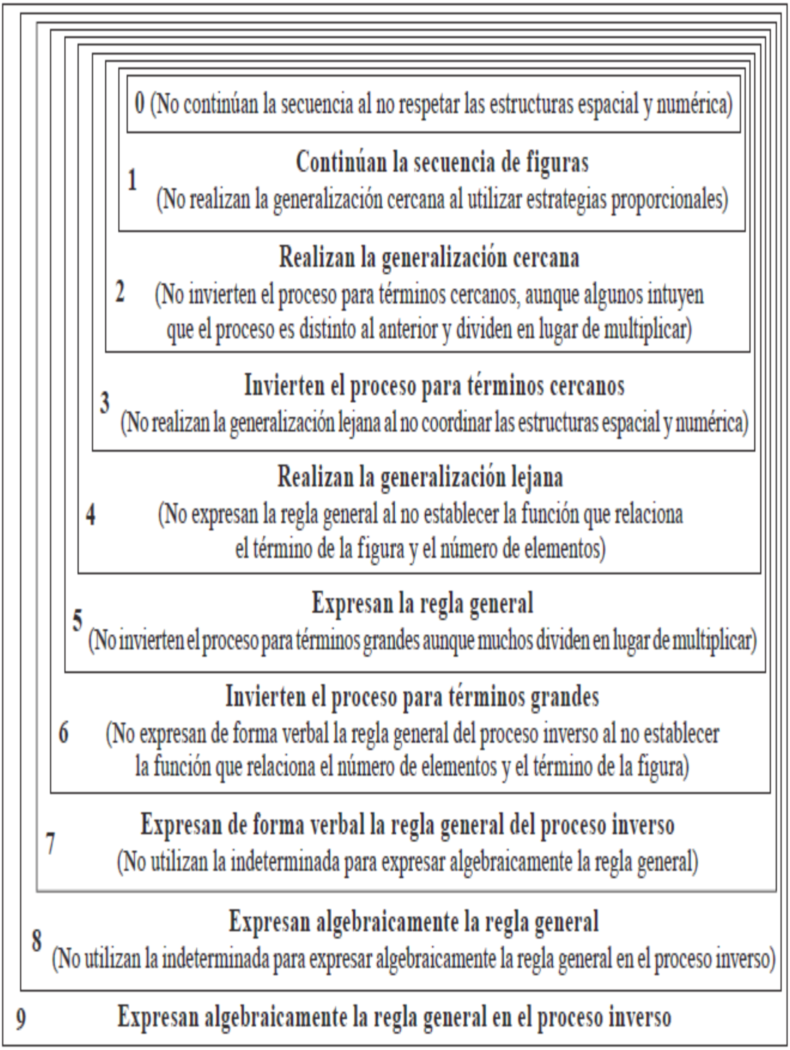
Figura 7:
Estrategias de resolución de problemas de generalización de patrones

ESTRATEGIAS
- D Directo
- EA Estrategias aditivas
  - RD Con dibujo
  - RI Recuento iterativo → $f(n) = f(1) + (n\text{-}1)\cdot a$
  - RR Recuento recursivo → $f(n) = f(p) + (n\text{-}p)\cdot a$
- EF Estrategias funcionales
  - FL Función local → $f(m) = m\cdot a + b$, m determinado
  - FG Función global → $f(n) = n\cdot a + b$, n indeterminado
- EP Estrategias proporcionales → $f(n) = a\cdot n$
- O Otras

Así mismo se pretende utilizar los descriptores de los niveles de la trayectoria de aprendizaje de la generalización de patrones propuestos por Zapatera (2018); estos descriptores son acumulativos, de forma que un determinado nivel también incluye los descriptores de los niveles que le preceden; además de que se muestra la dificultad que impide a los estudiantes de un determinado nivel avanzar al siguiente (figura 8).

Figura 8:

Descriptores de los niveles de la trayectoria, Zapatera (2018)



Metodología

Participantes y contexto

En este estudio participarán 20 estudiantes de 2° año de educación secundaria (en edades de 13 y 14 años) de la Escuela Secundaria Técnica Número 90, que se encuentra ubicada en la comunidad de Tepetixtla, municipio de Coyuca de Benítez, Gro. tiene una antigüedad de 39 años; es una institución de organización completa con una matrícula estudiantil de 198 y 20 profesores que cubren las asignaturas.

Tareas

Uno de los objetivos de la aplicación de las tareas propuestas, será analizar cómo la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) influye en el proceso de generalización de patrones, que los estudiantes construyen; así como establecer la progresión de los estudiantes mediante niveles de desarrollo de la trayectoria de aprendizaje.

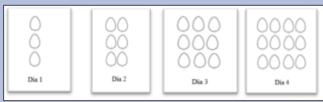
Se han diseñado las siguientes tres actividades con diferente grado de complejidad tomando la perspectiva de Clements y Sarama (2004) en la cual señalan que los estudiantes progresan a través de los niveles de desarrollo y en el que consideramos los niveles de desarrollo de Zapatera (2018). Consecuentemente los objetivos de esta trayectoria hipotética de aprendizaje vienen dados en función de los aprendizajes esperados señalados en el plan y programa de estudio (SEP, 2011). Se pedirá organizar a los estudiantes en equipos de cuatro integrantes, a los cuales se les darán hojas blancas para que realicen las anotaciones respectivas con lapiceros (se pretende analizar sus producciones), las cuales al finalizar las actividades se les han de recoger; además se les facilitará taparroscas de refresco a fin de que manipulen las sucesiones.

Actividad 1. *Tiempo:* 20 min

El granjero John cría gallinas. Todos los días tiene el trabajo de recoger los huevos y ponerlos en casilleros (ver figura 1).

Figura 1:

Sucesión de huevos recolectados



a) Dibuja los huevos que habrá en el día 5
b) Dibuja los huevos que habrá en el día 6
c) ¿Cuántos huevos habrá en el día 20?
d) ¿Qué día se tendrán 200 huevos?
e) ¿Qué procedimiento utilizaste?
f) ¿Hay alguna regla o patrón que permita calcular la cantidad de huevos? ¿Cuál es?
g) ¿Hay alguna relación entre el "número de día" y el "número de huevos"?
h) Describe con palabras la regla que permita calcular la cantidad de huevos en cualquier día
i) ¿Cuáles son las dos cosas (variables) que están variando (cambiando)?
j) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular la cantidad de huevos para cualquier día?

Actividad 2. *Tiempo*: 30 minutos

Se pide organizar a los estudiantes en equipos de cuatro integrantes

Observa la siguiente figura y rellena los espacios en blanco de la tabla

Figura 2:

Sucesión cuadrática con taparroscas

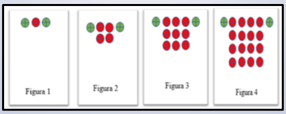


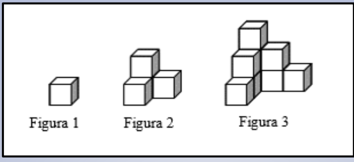
Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				50	…	n
Número de taparroscas	3	6	11				51			102					…	

a) ¿Qué está variando?
b) ¿Cuáles son las variables que intervienen?
c) ¿cómo se relaciona el número de figura con la cantidad de taparroscas?
d) ¿Qué estrategias utilizaste para rellenar los espacios en blanco?
e) Con tus palabras describe la expresión general de la sucesión
f) ¿Qué expresión algebraica permite obtener cualquier número que forma parte de la sucesión?
g) El valor 902 forma parte de la sucesión, ¿qué lugar ocupa en dicha sucesión?

Actividad 3. *Tiempo:* 50 minutos

Se pide organizar a los estudiantes en equipos de cuatro integrantes

Analiza la siguiente sucesión



a) Observen que en la figura 1 es posible ver tres caras del cubo, y que la figura 2 se pueden ver nueve caras de los cubos que la forma. ¿Cuántas caras es posible ver en la figura 3? ¿Cuántas en la figura 4?

b) Si se continúa con la construcción de las figuras, ¿cuántas caras sería posible ver en la figura que ocupe el lugar 15?

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el total de caras será que es posible ver en cualquier figura que esté en la sucesión?

d) ¿Qué número corresponde en la sucesión a la figura en la que es posible ver 133 caras de los cubos que la forman?

Por esta razón es pertinente que los oriente, como se indica a continuación. Señale que la expresión que se busca es una expresión de segundo grado, ya que la segunda diferencia de los términos de la sucesión es constante, como se muestra en la tabla siguiente:

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
Caras que se ven	3	9			
Primera diferencia	9 – 3 = 6	17–9 = 8	27–17=10	39–27 = 12	
Segunda diferencia	8 – 6 =2	10–8=2			

Con la primera actividad se estudiará el proceso directo de la generalización lineal, con la que se pretende hacer un análisis de la generalización cercana y lejana, contextualizando el problema al entorno del estudiante.

Con la segunda actividad se pretende que el alumno reconozca, interprete y establezca el patrón que sigue la sucesión para poder rellenar la tabla que se le presenta, como medio auxiliar en contestar las preguntas; las cuales están enfatizadas a que el estudiante identifique una regularidad en la sucesión, que relacione la estructura espacial, basada en la distribución espacial de los elementos de las figuras, y la estructura numérica, basada en el número de elementos que componen cada figura (Radford, 2011; Rivera, 2010). En este mismo sentido va propuesto el tercer problema, aunado a introducir en los estudiantes el método de las diferencias, para que ellos puedan encontrar la expresión general que describe el enésimo término de la sucesión.

El objetivo general de estas tareas es analizar el proceso de generalización de patrones en estudiantes de Educación Secundaria, con rezago académico; y con las cuestiones se pretende establecer las progresiones de desarrollo en la generalización de patrones de los estudiantes mediante niveles de desarrollo de la trayectoria de aprendizaje, así como hacer una propuesta local de innovación.

Recolección de datos y su análisis

Para la recolección de datos recurriremos a la videograbación de las actividades a desarrollar, las cuales serán organizadas en equipos. Se les pedirá a los estudiantes que en hojas blancas (que se les facilitarán) escriban las posibles soluciones que ellos consideren con lapiceros; esto tiene como finalidad recabar datos de procedimientos tanto erróneos como correctos, con la finalidad de contrastar con la trayectoria hipotética de aprendizaje.

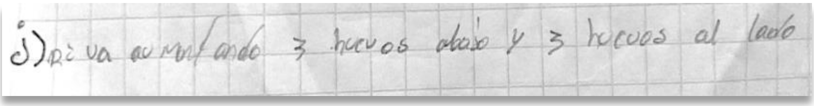
Resultados

Cómo no se han aplicado las actividades completas, se obtuvieron algunos resultados previos de puestas en escena que se realizaron de forma parcial, son:

Los alumnos utilizan argumentos que forman parte del sentido numérico (ver figura 9) debido a que tienen dificultades a la hora de concebir o proceder con el pensamiento algebraico. Fueron pocos los alumnos que trataron de formular una expresión algebraica, pues la mayoría se dedicó a rellenar las tablas de ayuda.

Figura 9:

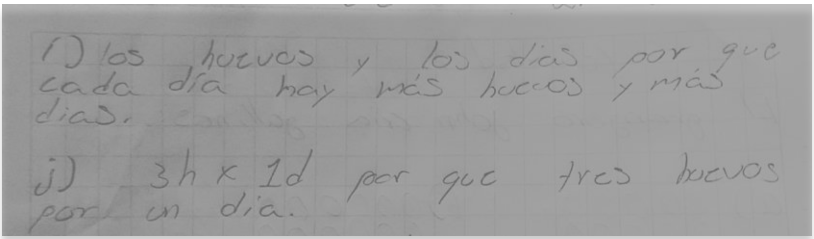
Se le pide al alumno establecer la expresión algebraica



Los que formularon una expresión algebraica lo hicieron con deficiencias, combinando fórmulas con letras (ver figura 10). En el inciso "j" de la primera actividad se les pide que representen la expresión algebraica de la generalidad, uno de ellos escribe 3 h * 1 d, donde se entiende que el coeficiente 3 representa el ritmo de crecimiento de la sucesión que es percibido por el alumno, la literal h los huevos, mientras que d a los días; esto refleja el intento del alumno por establecer una relación entre el número de días y el número de huevos

Figura 10:

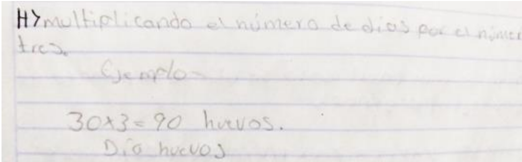
*El alumno representa una fórmula algebraica, 3h *1 d.*



Con lo anterior, deducimos que el alumno entiende la generalización de la sucesión y la manera en cómo sigue un patrón, pero se ven imposibilitados por carencias de conocimientos, al representar algebraicamente la generalización (ver figura 11).

Figura 11:

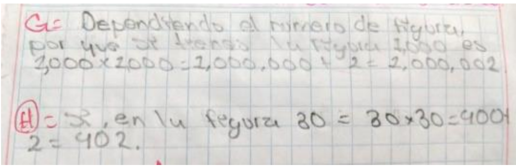
Comprensión y representación verbal de la generalización



Presentan algunas carencias en cuanto a la concepción de conceptos, como: raíz cuadrada, variables, operaciones básicas, etcétera. Cuando en el problema 2 del inciso h se le pregunta al alumno sí habrá alguna figura con 902 taparroscas, este procede de manera inversa; en lugar de sacar la raíz cuadrada del número 902 procede mediante cálculo y error para aproximarse al número; de tal manera que llega el momento en que multiplica 30*30 y se percata que al sumarle 2 le resulta el 902, de manera que puede concluir que en la figura 30 de la sucesión habrá 902 taparroscas(ver figura 12).

Figura 12:

Aproximación mediante ensayo y error



Se puede apreciar que los estudiantes son capaces de establecer una relación funcional, en la que describen con sus palabras la regla que describe el enésimo término de la sucesión; encontrándose en el segundo estadio de los procesos de generalización descritos por Zapatera (2018). De esto se sigue que tienen dificultad para encontrar la relación inversa, por tal motivo no son capaces de invertir el proceso inverso; de modo que cuando se les da un elemento en la imagen de la sucesión, proceden ineficazmente mediante cálculo y error partiendo del dominio de la sucesión.

De acuerdo con las progresiones de la trayectoria que describe Zapatera (2018), hay descriptores de nivel que son completamente cubiertos por los estudiantes, tales son: continúan la secuencia de figuras, realizan generalización cercana y lejana, expresan la regla general en lenguaje común. Pero no logran invertir el proceso ni para términos cercanos.

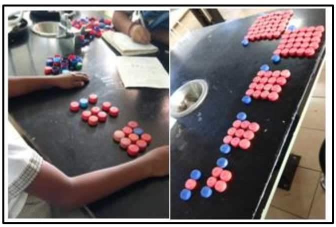
Conclusiones

Como conclusiones mencionamos que las ayudas visuales (como tablas o dibujos) son de gran utilidad para los alumnos, ya que permiten concebir o visualizar la forma, estructura o cantidad de las figuras y la generalización, además de que el material lúdico estimula a los estudiantes al trabajo individual y colaborativo (ver figura 5.1); propiciando en este caso el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de secundaria.

Se considera que sería de mayor utilidad añadirle más espacios en blanco a las tablas para que los estudiantes organicen la información sistemáticamente, y con ello puedan pasar de la abstracción simbólica a la sucesión de números, con el fin de representar la generalización de los patrones.

Figura 13:

Construcciones de las sucesiones con taparroscas



El empleo de taparroscas permite que los estudiantes se interesen por realizar la actividad, además de que les permite analizar la estructura que sigue la sucesión para relacionar las distintas variables que intervienen, y a partir de esto establecer una relación funcional.

La aplicación de estas secuencias de actividades ha permitido analizar fortalezas y corregir deficiencias para replantearlas por medio de la reflexión del proceso en una nueva THA.

Se elabora esta investigación para contribuir a que los docentes reconozcan y valoren la importancia de la generalización de patrones para potenciar el paso del pensamiento numérico al pensamiento algebraico en los alumnos; así como de tener instrumentos para medir su progresión mediante la trayectoria.

Referencias bibliográficas

Begle, E. & Glenadine, E. (1980). Why do Research? En: R. J. Shumway (ed), *Research in Mathematics Education* (pp. 3-19). Reston: N.C.T.M.

Burgués, C., & Gimenez, J. (2006). Las trayectorias hipotéticas de formacion inicial (TRHIFI) como instrumento para el analisis del desarrollo profesional. *Edumat*, 1–13

Callejo, M. & Zapatera, A. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real, España: SEIEM.

Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 163–184. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_5

Clements, D. & Sarama J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* . New York: Routledge.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2010). *Las trayectorias del aprendizaje en las primeras matemáticas – secuencias de adquisión y aprendizaje*. 1–6. https://www.enciclopediainfantes.com/pdf/expert/matematicas/segun-los-expertos/las-trayectorias-del-aprendizaje-en-las-primeras-matematicas

Clements, D., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large -scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(2), 127-166.

Corcoran, T., Mosher, F., & Rogat, A. (2009). Learning Progressions in Science: An Evidence-Based Approach to Reform. *CPRE Research Reports*. Recuperado de https://repository.upenn.edu/cpre_researchreports/53

Gómez, P. & Lupiáñez, J. L. (2005). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA,I(2), 79-98.*

Gómez, P., González, M., & Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación de Profesorado, 18*(3), 319-338.

Gravemeijer, K. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education: A Foundation for Standards, Curriculum, Assessment, and Instruction. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105–128. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602

Lesh, R. & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind –In which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 205-226.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada.

Martínez, F ; Torregrosa, G. & Llinares, S. (2015). *Propuestas de enseñanza centradas en una trayectoria de aprendizaje de un contenido matemático usando materiales didácticos*. Universidad de Alicante.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Editorial Labor.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, 40 (1), 83-96. doi: 10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turkey: PME.

Rivera, F. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. In M. F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Belo Horizonte, Brazil: PME.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* En https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/18394/Programa._Secundaria_tercer_grado_Matematicas_guia_para_maestros.pdf

Steffe, L. (2003), "Fractional commensurate, composition, and adding schemes. Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5", *The Journal of Mathematical Behavior 22*, 217-235.

Simon, M. & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91–104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Trigueros, M., Cortés, M., Jinich, E., Schulmaister, M., Lozano, M. & Sandoval, I. (2016). *Matemáticas 3*. Ciudad de México: Editorial Santillana

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne, Australia: PME.

Wilson, P. H. (2009). *Teachers' uses of a learning trajectory for equipartitioning*. NCSU, North Carolina.

Zapatera, A. (2015). *La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria*. Universidad de Alicante, Alicante, España.

Zapatera, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *21*(1), 87-114. https://dx.doi.org/10.12802/relime.18.2114

Avances de Investigación Nivel Medio Superior

Estudio sobre el proceso de la argumentación matemática en el Bachillerato: el caso de la Semejanza[6]

Irma Joachin Arizmendi – Hermes Nolasco Hesiquio

alizariam192728@gmail.com

Este trabajo presenta algunos resultados en torno a la argumentación de geometría de parte de estudiantes de la Educación Media Superior. El objetivo del escrito es caracterizar la argumentación de los estudiantes en el aula de matemáticas con respecto a un contenido específico "la semejanza". Se adopta como marco teórico recae en la conceptualización de la argumentación de Benegas y Krabbe. Como metodología consideramos el modelo argumentativo de Toulmin y la interacción en el aula de matemáticas de Krummheuer. Los datos de este trabajo proceden de sesiones de trabajo con estudiantes de este nivel educativo. Entre las conclusiones destacamos la presencia de argumentos regulares, cuya presencia es mayor que la de los argumentos críticos al trabajar en el aula de clases.

Palabras Clave: argumentación matemática, semejanza, modelo de Toulmin, interacción.

Introducción

En la enseñanza de las matemáticas se hace presente el tema de argumentación, desde el punto en que se puede apreciar en las aulas que tanto el docente como el estudiante carecen de elementos que le

[6] Joachin, I. y Nolasco, H. (2020). Estudio sobre el proceso de la argumentación matemática en el Bachillerato: El caso de la Semejanza. En M. Méndez, M. Ferrari & N. Marquina (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 1* (pp. 71-96). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México.

permiten que ésta se haga presente. Cabe mencionar que evidentemente es fundamental para que el estudiante construya su conocimiento.

En los últimos años, se ha incrementado notablemente el número de investigaciones que destacan el papel fundamental que tiene la argumentación no sólo en relación con la demostración matemática, sino en la actividad matemática en general, tanto entre los matemáticos profesionales como entre los alumnos de matemáticas de distintos niveles (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007; Aberdein y Dove, 2013). Algunos de estos trabajos se centran en la exploración y caracterización de las dificultades que los alumnos evidencian cuando se enfrentan a tareas que implican demostraciones (Healy y Hoyles, 2000; Mamona-Downs y Downs, 2011; Pfeiffer, 2010). De esta forma, se muestra que hay un problema en cuanto a la argumentación se refiere, puesto que, si no se trabaja en el aula, repercute en otras actividades matemáticas como lo es la demostración.

En la Educación Media Superior se confirma el interés por estas competencias, en especial argumentar. Para ello, es esencial el desarrollo de las prácticas argumentativas y que según De Gamboa, Planas y Edo (2010) son entendidas como los hechos que realiza el estudiante para dar a entender su resultado y esto tiene que ver con explicar, narrar, y razonamientos que conformen la argumentación. Especialmente, es necesario comprender los procesos en los que alumnos y profesores construyen y validan el conocimiento matemático. Respecto a la argumentación, la OECD (2016) la identifica como una capacidad fundamental y afirma que: "implica procesos de pensamientos arraigados de forma lógica que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación dada, o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones de los problemas" (p. 70).

La semejanza como contenido matemático es tratado en la secundaria y es hasta el tercer grado donde es introducido, en el tema: Figuras y cuerpos geométricos. Como aprendizajes esperados, el estudiante debe "construir polígonos semejantes, determinar y utilizar criterios de semejanza de triángulos" (SEP, 2017, p. 315). Posteriormente se vuelve a retomar en Matemáticas III, que se cursa en el tercer semestre cuya Unidad de Aprendizaje es: Geometría Plana y Trigonometría, particularmente en la Unidad de Competencia I: Ángulos y Triángulos, como marca la UAGro (2010). Por lo que se observa que hay un período muy largo en el que se deja en el "olvido" este tema.

Cabe señalar que el enfoque de trabajo en este nivel educativo es por competencias y regresando a nuestro foco principal, argumentación, sobre este respecto afirman con los cursos que corresponden al área se desarrollan las competencias disciplinares de matemáticas necesarias para que el estudiante argumente y estructure mejor sus ideas y razonamientos. "Argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático" (UAGro, 2010, p. 5).

También se tuvo la oportunidad de analizar dos investigaciones relacionadas a los conceptos implicados en el contenido matemático (semejanza), los cuales son, razón, proporción y proporcionalidad.

Sánchez (2013) trabaja estos conceptos involucrados. Por un lado, su primera investigación está centrada en tratar dichos contenidos desde lo variacional puesto que, desde la experiencia del autor, ha confirmado cómo los profesores atienden a éstos de una forma mecánica y tradicional que no le permiten al estudiante apropiarse de la definición. Por el otro, la segunda, se enfoca en trabajarlos desde una situación de reparto para analizar qué estrategias utilizan los estudiantes al trabajar con éstos. En nuestro caso, no nos centramos en la construcción o comprensión de la semejanza que claramente está relacionada con estos contenidos matemáticos.

Es considerable la cantidad de investigaciones centradas en estudiar el rol que tiene la argumentación en el aula de matemáticas y en la matemática en sí. Nuestra investigación se enfoca en analizar los argumentos que construyen los estudiantes de bachillerato, pretendiendo así, contribuir considerando la siguiente pregunta:

¿Qué argumentos construyen los estudiantes en la clase de matemáticas, particularmente con el contenido matemático "semejanza?

Para lo cual nos planteamos el siguiente objetivo de investigación: Caracterizar la argumentación de los estudiantes en el aula de matemáticas con respecto a un contenido específico: la semejanza. En consecuencia, la discusión anteriormente mencionada resulta útil y muestra que hay interés por parte de la comunidad de investigación en la educación matemática, el cual va aumentando y tiene que ver con la argumentación, con cuya ayuda los conocimientos matemáticos se construyen y validan. En la próxima sección abordaremos más autores que se dedican a investigar el papel que desempeña y la importancia que tiene la argumentación matemática en sí misma y en el aula de matemáticas.

Marco teórico

La cantidad de estudios realizados sobre la argumentación nos lleva a reflexionar que sin duda es importante dar seguimiento a, desde cualquier punto de vista (competencia, habilidad, proceso) para mejorar en la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas.

Para hablar de la argumentación debemos primeramente comprender que es un argumento, para posteriormente ver qué es argumentar, con base al argumento, encontramos que es: un razonamiento para probar o demostrar una proposición, o para convencer de lo que se afirma o se niega (Real Academia Española (RAE), 2019). *Así, podemos entender que la argumentación son las acciones realiza una o varias personas para convencer a otras o a sí mismo. Al tener presente las definiciones anteriores, podemos pasar a lo que es de nuestro interés y precisamente viene a ser la argumentación matemática, si bien, algunos autores dan su posición sobre ésta, otros más la sitúan en matemáticas y en el aula, atenderemos a continuación estos puntos.*

Argumentación matemática

Duval (1999), designa la argumentación matemática como "una forma de razonamiento natural, que no se deja describir ni evaluar según los clásicos criterios lógicos" (p. 3). Por su parte, Banegas (2013) nos somete a un análisis sobre su revisión elaborada acerca del Modelo de Toulmin y sobre el concepto de argumentación desde su forma general hasta la argumentación matemática. Él toma como argumentación "el conjunto de técnicas o métodos utilizados para establecer un enunciado. En el proceso un enunciado cuestionado conduce a un enunciado correcto o con el que se está de acuerdo, aceptado por todos los participantes en la discusión" (Banegas, 2013, p.48).

En esta misma dirección, Krabbe (2013) realiza un análisis para distinguir los argumentos, la demostración y los diálogos. Además, señala que no hay argumento bueno o malo porque en cualquiera de los dos casos no perderá el estatus de argumento. Él afirma que para demostrar hay una necesidad de usar un tipo de gramática especial y no puede confundirse el hecho de que toda argumentación pueda ser tomada como una demostración. En este sentido, adoptamos las ideas de Banegas (2013) y Krabbe (2013) sobre la argumentación, en la cual se establecen enunciados que construyen los estudiantes de tal forma que permitan el consenso de todos los presentes, además de recalcar que durante este proceso dichos enunciados correctos o incorrectos seguirán siendo llamados: argumentos.

Argumentación en el contexto de la matemática escolar

Investigaciones realizadas por Planas y Morera (2012); Goizueta y Planas 2012; señalan a la argumentación como un discurso que permite razonar lógicamente, así, se da una cadena de razones dentro de las cuales se dejan ver competencias argumentativas como lo son: describir, explicar, argumentar (parcialmente) y justificar. Por su parte, Solar-Bezmalinovic (2018), realiza su investigación en torno a la argumentación mediante el desarrollo de la argumentación colectiva en el aula de clases: identificación de patrones de pensamiento, interacción dialógica entre profesor y estudiantes, y herramientas para abordar las contingencias. Centrándose principalmente en cómo estas benefician la educación matemática.

En cuanto a la argumentación desde la perspectiva interaccionista destacan los trabajos de Knipping (2008); Krummheuer (2011, 2015); Cabañas y Cantoral (2011); Knipping & Reid (2015), en las cuales se plantean cómo reconstruir y analizar las estructuras a Se adopta dos métodos propuestos por Krummheuer (2015): el análisis de la argumentación y el análisis de la participación y la relación entre estos dos métodos como parte de la interacción en el aprendizaje de matemáticas.

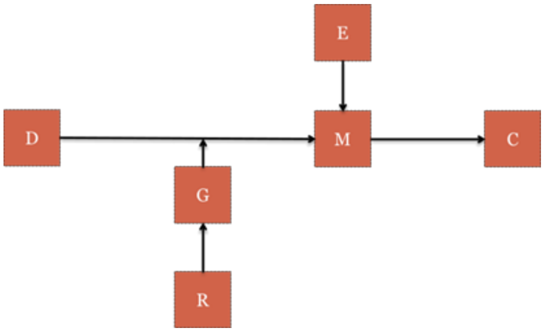
Modelo de Toulmin

Toulmin (2007) considera que un argumento está conformado por elementos los cuales tienen una función en dicha estructura de su Modelo (ver Figura 1): los Datos (D), están constituido por los hechos, la razón en la que la argumentación se basa. Garantías (G), permite la conexión, reglas, principios, enunciados de carácter general que permitan mostrar cómo de los datos se pasa a la conclusión (C).

Modalizadores (M), que maticen en la (C), precisar el grado de fuerza que los (D) Y (G) ofrecen. Excepciones (E), refutación, este elemento indica las circunstancias en que la autoridad de la (G) no funciona. Respaldo (R), varía de un campo de argumentación a otro (clases, leyes, datos estadísticos, hechos históricos).

Figura 1.

Esquema argumentativo.



Nota: Tomado de Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007).

Tipos de argumentos

Banegas (2013) menciona dos tipos de argumentos: *regulares* y *críticos*, los cuales unifica y los llama: sustanciales. A continuación, se muestran cómo los define:

> Los argumentos matemáticos *regulares* dan por sentado que las ideas dentro del marco teórico de la argumentación son relevantemente coherentes, y aplicable a los hechos bajo consideración. Por esta razón, estos elementos se ajustan a las teorías y reglas actualmente aceptadas, por lo cual no representan ningún tipo de desafío. Los argumentos matemáticos *críticos* son creados precisamente para desafiar dichas teorías y reglas las cuales, por lo tanto, pierden su confiabilidad, relevancia o aplicabilidad y están abiertas a discusión crítica, refutación o reajuste. (Banegas, 2013, p.53-54)

Metodología

La importancia de la interacción en el aula es un elemento que consideramos importante y a este respecto Krummheuer (2015) señala que el aprendizaje de las matemáticas depende de la participación del alumno en los procesos de argumentación colectiva

En esta sección reportamos cómo se realizó parte de nuestra Secuencia didáctica. Mostramos además los aspectos metodológicos, participantes y organización de las sesiones.

Los participantes y el contexto

La Secuencia didáctica va dirigida al Nivel Medio Superior, en este caso, una de las actividades que conforman nuestra Secuencia Didáctica fue aplicada en la Escuela Preparatoria N° 2 de la UAGro. Se encuentra ubicada en la Avenida Ruíz Cortines N. 859, Colonia Alta Progreso, 39610 en Acapulco de Juárez, Guerrero. Participaron los alumnos del grupo 303 que cursaban la Unidad de Aprendizaje Geometría plana y trigonometría. El grupo está conformado por 33 estudiantes cuyas edades están entre 16 y 17 años. Algunas de las características académicas de los estudiantes son: disposición, motivación, confianza en sí mismos.

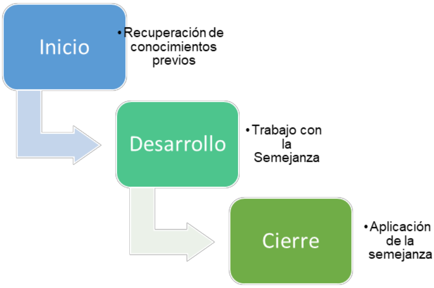
Secuencia didáctica y sus fases

Nuestro diseño se desarrolla en tres fases: Inicio, Desarrollo y Cierre (ver Figura 2).

En la primera fase se pretende recuperar los conocimientos necesarios para abordar el contenido semejanza, tales contenidos son: razón y proporción, que están estrechamente relacionados.

Figura 2.

Fases de la Secuencia didáctica



En la segunda fase, se pretende trabajar con el concepto de semejanza y relacionar los contenidos (razón y proporción) que le permitan al estudiante avanzar en la forma de argumentar utilizando los datos trabajados anteriormente. En la última fase pretendemos aplicar los conocimientos de semejanza para resolver problemas que involucran este contenido.

A continuación, se muestran algunas de las tareas que componen la actividad 1, que fueron las que se trabajaron en este caso: tarea 4, tarea 5, tarea 6, las tareas anteriores a estas tuvieron que ver con la razón entre segmentos.

Organización y temporalización

Las secuencias fueron programadas para desarrollarse en tres sesiones de 50 minutos (ver Tabla 1).

En la tabla 1 se mencionan las actividades y las tareas de esas actividades a trabajar en cada una de las sesiones, considerando así los problemas que las conforman. En la primera sesión que tiene que ver con la recuperación de conocimientos, en la que comenzarán a dar argumentos, puede suceder que los estudiantes nos narren, expliquen, realicen dibujos que le sirvan de argumentación.

Tabla 1:

Temporización de las tareas y su descripción.

sesión	Tipo de Tarea	Descripción	Intervención	Tiempo empleado
1	Asegurar conocimientos previos	Tarea 1. Identificar la razón y proporción entre segmentos.	Individual Binas	10 minutos 40 minutos
2	Elementos de esquema argumentativo de Toulmin	Tarea 2. Semejanza de Triángulos.	Individual Binas	10 minutos 40 minutos
3	Elementos de esquema argumentativo de Toulmin	Tarea 3. Teorema de Thales.	Individual En colectivo	10 minutos 40 minutos
			Total	150 minutos

Tareas

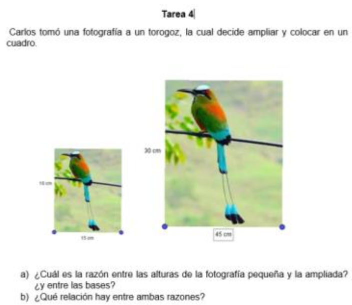
A continuación, se describen las tareas realizadas.

Tarea 4

En esta tarea se deben presentar los elementos del Modelo de Toulmin mediante la resolución de problemas que implican la identificación de la razón entre segmentos y segmentos proporcionales, estos conceptos se utilizan para abordar la semejanza. La tarea les permite analizar las imágenes y las medidas de ellas para comenzar a dar sus argumentos mediante la interacción y aporte de ideas de ambos integrantes.

Figura 3.

Tarea 4: identificación de la razón entre segmentos y segmentos proporcionales

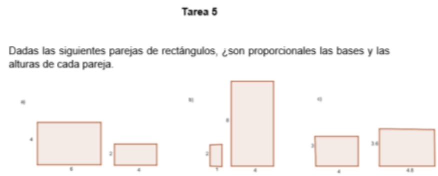


Tarea 5

Esta tarea se caracteriza por involucrar la comparación entre los lados de los rectángulos que en este caso tiene que ver con la razón. La tarea involucra a los estudiantes a reflexionar sobre qué lados comparar para establecer la razón y ver si son proporcionales, además origina que los estudiantes discutan y propicien a dar argumentos sobre estos contenidos (ver Figura 4).

Figura 4.

Tarea 5 Comparar para establecer la razón

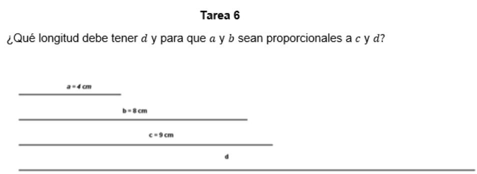


Tarea 6

La tarea 6 se articula de los contenidos ya trabajados en las tareas anteriores, implica el uso de estos conocimientos para que los estudiantes tengan más elementos que contribuyan a su argumentación y así determinar la medida del segmento d (ver Figura 5). La tarea también permite al estudiante reflexionar para responder utilizando conceptos y expresiones algebraicas.

Figura 5.

Tarea 6: determinar la medida del segmento



Recolección de datos y su análisis

La recolección de los datos se sustenta desde las producciones escritas (hojas de trabajo de los estudiantes), respuestas en equipo y argumentación en conjunto. La Sesión 1 fue grabada en vídeo y audio para lograr transcribir después lo sucedido. El análisis de los datos también se apoya de la reconstrucción de la argumentación de Toulmin (2007).

Análisis de la argumentación

Para el análisis de la argumentación, se realizaron primeramente transcripciones del vídeo y audio de las tareas trabajadas, analizando así los argumentos de los estudiantes con base al esquema de Toulmin (2007).

Resultados

Los resultados que se presentan en cuanto a los argumentos generados por los estudiantes respecto a las tareas propuestas, los cuales se propiciaron a causa de la interacción en el aula de clases.

Tarea 4

Tarea 4 (Tania y Cecilia)

A continuación, veamos las intervenciones de algunos estudiantes que consideramos interesantes respecto a la tarea 4 (ver Tabla 2).

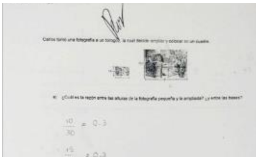
Tabla 2:
Transcripción 1

Cecilia:	Podemos ver que una imagen es más grande que otra.
Profesor:	¿Qué más se puede decir al respecto?
Tania:	La primera imagen mide 10 cm menos que la primera de alto verdad Cecilia. La base mide 30 cm menos que en la segunda imagen.
Cecilia:	La pregunta nos pide la razón entre las alturas y las bases, pero no sé cómo sacar la razón.
Tania:	Vimos que la razón era como la fracción así se escribía, pero era para comparar las medidas podemos hacerlo así.

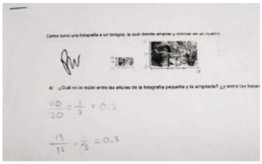
Ellas tratan de comprender lo que se pide en la tarea, intercambian ideas, además, tratan de encontrar sentido a la comparación de las longitudes, en su caso Tania evoca la "razón" primero lo hace refiriéndose a algo similar con la fracción, pero después recuerda que debe comparar. Así ambas deciden escribir esas comparaciones de la siguiente manera (ver Figura 6).

Figura 6.

Producciones de Cecilia y Tania.



Producción de Cecilia



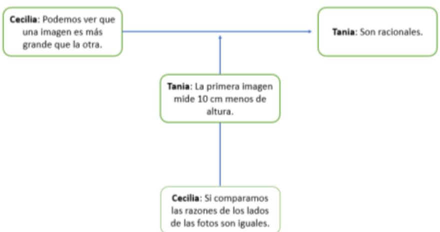
Producción de Tania

Análisis de la argumentación (Tarea 4)

La producción de ambas estudiantes aparentemente es parecida, pero durante el poceso de tratar de argumentar (ver Figura 9), en el caso de Cecilia ella asume que es correcto comparar y sacar la razón, estableciendo así el cociente de ambas medias según los lados, y explica que los resultados son iguales, la razón es la misma.

Figura 7.

Argumentos de Tania y Cecilia.



En la segunda pregunta al cuestionar sobre qué relación hay entre ambas razones, ella señala que son iguales, lo contrario al argumento de Tania, intrepretando que Tania se refería a lo proporcional, pero ella no encontraba la palabra correcta, por ello lo nombró así "racionales", se pudo observar que presentó confusión en los términos, pero pudo aplicarlos y aunque los argumentos no fueron tan claros, dieron elementos de ello.

Se puede apreciar un argumento regular porque no hay un desafío con base a la utilización de procedimientos requeridos para la solución.

Tarea 4 (Reyna y Amairani)

En caso de Reyna y Amairani sucedió lo siguiente: (ver Tabla 3).

Tabla 3:

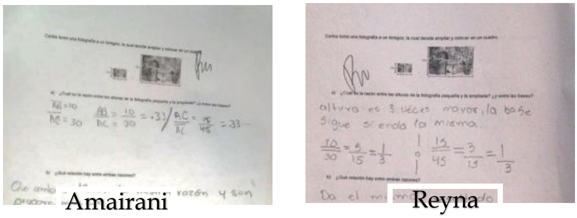
Transcripción 2

Reyna:	**La parte de debajo de las fotografías es tres veces mayor.**
Profesor:	¿En qué te basas para asegurar eso?
Amairani:	Viendo las medidas, obtenemos.
Profesor:	Pero sólo al verlas, ¿hay otra forma de asegurarlo?
Reyna:	Hay que dividir entonces.
Amairani:	No, primero debemos ver y tomar las medidas de los lados de los cuadros, para encontrar la razón de los lados. Primero debemos escribir los segmentos de las imágenes y dar la medida de cada uno de ellos para después hacer la comparación.
Reyna:	Yo encuentro que su razón es igual.

En las producciones de ambas podemos observar cosas particulares, en el caso de Amairani sus argumentos son enfocados a lo geométrico, ella recurre a las longitudes pues ya conoce que la razón entre segmentos debe hacer comparar ambos y lo presenta como se muestra en la Figura 7, ella dice: el segmento AB es al segmento CD y así para el caso de la base, y nos da la misma razón, porque son iguales, la razón es .3. Así su argumentación recae en que si son proporcionales las razones son iguales.

Figura 7.

Producción de Amairani y Reina.

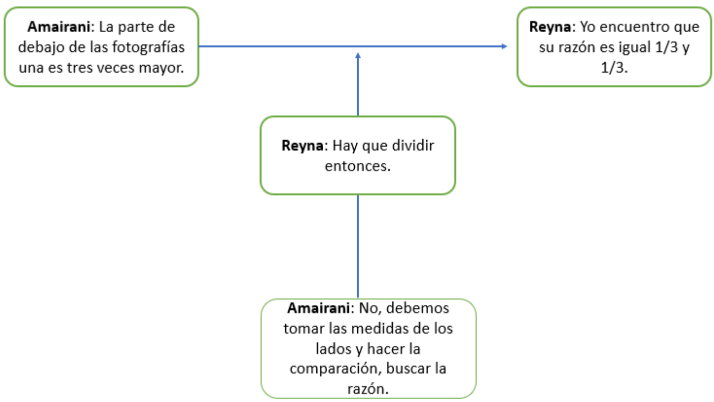


Análisis de la argumentación

Aquí se observa un argumento crítico, pues se hace presente la opinión contraria a lo que una de ellas argumenta (ver Figura 8), así refuta una idea concluyente de la compañera. Posteriormente se convencen de que la consideración de Amairani tenía sentido para encontrar la razón buscada.

Figura 8.

Argumentos de Amairani y Tania en Tarea.



Tarea 5

Tarea 5 (Tania y Cecilia)

Cecilia y Tania tuvieron un poco más de elementos para dar sus argumentos (ver Tabla 4):

Tabla 4

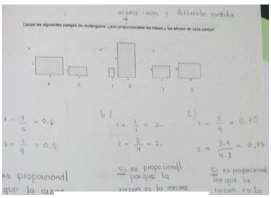
Transcripción 3

Tania:	Hace rato trabajamos con medidas en las imágenes, ahora es similar.
Cecilia:	Hay que comparar las razones estás de acuerdo Tania, encontrar la razón y si son iguales son proporcionales no racionales.
Cecilia:	Debemos encontrar ahora sus razones. Hay que hacerlo.
Tania:	La primera pareja de rectángulos no da la misma razón entonces no son proporcionales.

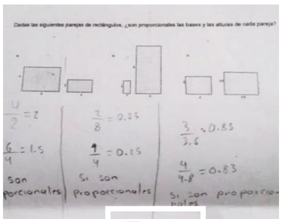
El trabajo colaborativo entre ambas estudiantes propicio a resolver de manera sencilla la tarea, apoyándose en cada momento una de la otra si surgían dudas, lo que obtuvimos de ello (ver Figura 9).

Figura 9.

Producciones de la tarea 5.



Cecilia



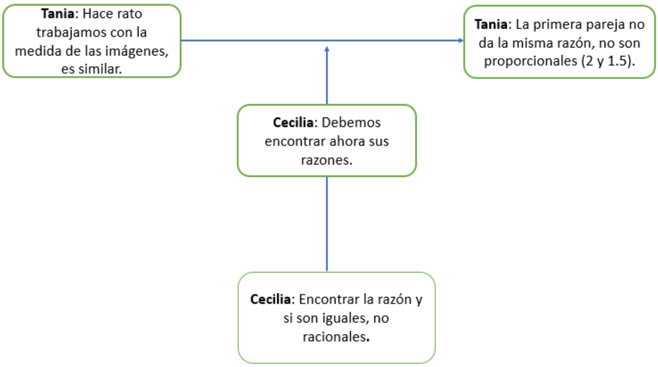
Tania

Análisis de la argumentación

Uno de los elementos del esquema de Toulmin que sale a relucir inmediatamente es el dato como lo muestra la Figura 10, se aprecia un argumento regular, en este sentido, ambas tienen elementos le sirve para argumentar la solución de una forma sencilla.

Figura 10.

Argumentos de Tania y Cecilia en Tarea 5.



Tarea 5 (Amairani y Reyna)

En esta tarea se pudo generar la interacción y aportes de ideas, propiciando así, argumentos que para esta son suficientes y la conversación entre ambas provocó lo que se pretendía. En el caso de Reyna y Amairani se realizó lo siguiente (ver Tabla 5):

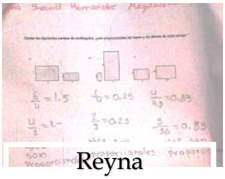
Tabla 5

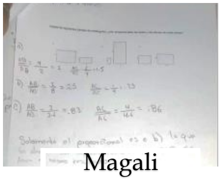
Transcripción 4

Reyna:	**Hay que hacerlo como hace rato.**
Amairani:	Sí, ya sabemos cómo obtener sus razones entre los segmentos.
Reyna:	Si nos dan iguales.
Amairani:	Son proporcionales.
Reina:	Yo creo que todos son así.

El acercamiento entre Amairani y Reyna les permitió tener otra mirada de su forma de ser, aunque, no interactúan seguido en clase, al momento de juntarlas se acoplan bien en la tarea asignada, evidencia de ello podemos (ver en la Figura 11.

Figura 11.





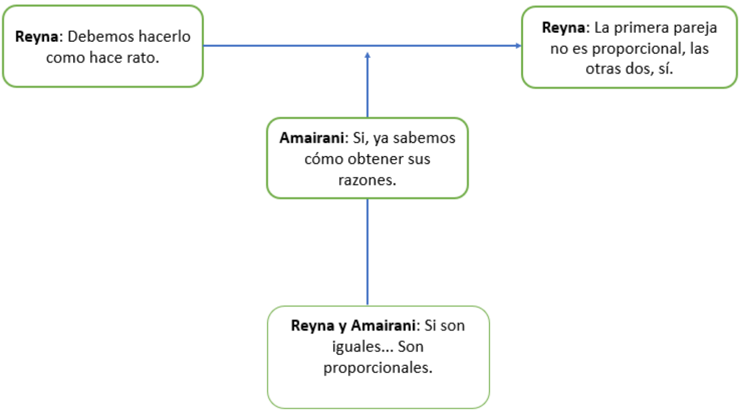
Acordar ideas para dar solución a las tareas fue un elemento clave que siguieron las alumnas.

Análisis de la argumentación

Analizando las producciones de ambas, se logró generar esa conversación que les permitiera argumentar, sin embargo, en la Figura 12, Reyna reconoce que la primera pareja de triángulos no son proporcionales, lo que no ocurre con Amairani, si bien, Amayrani tuvo el conocimiento, en su proceso ocurrió un trabajo con las operaciones que la llevaron a argumentar que sólo una pareja de rectángulos era proporcional, observando así, un argumento crítico.

Figura 12.

Argumentos de Reyna y Amairani en Tarea 5.



Tarea 6

Tarea 6 (Tania y Cecilia)

En la tarea 6 (ver Tabla 6) de la cual pudimos obtener:

Tabla 6:

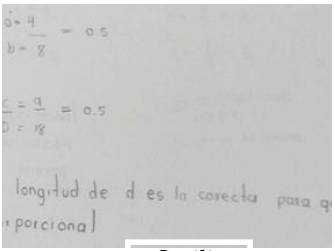
Transcripción 5

Cecilia:	Como bien hemos visto que para que sean proporcionales, debe tener la misma razón.
Tania:	Si, hay que buscar un número para que nos coincida.
Cecilia:	Hay que observar las rectas.
Tania:	Una es la mitad que la otra.

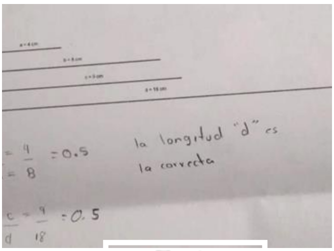
Tania y Cecilia se apoyaron mutuamente para fortalecer sus argumentos con lo ya venido trabajando en las tareas anteriores y se reflejó en las explicaciones que daban al realizar su tarea, observar detenidamente los segmentos les permitió ver cuántas veces podía caber uno en los siguientes, como en su producción muestra, escriben que son proporcionales (ver Figura 13).

Figura *13*.

Análisis de Cecilia y Tania en Tarea 6.



Cecilia



Tania

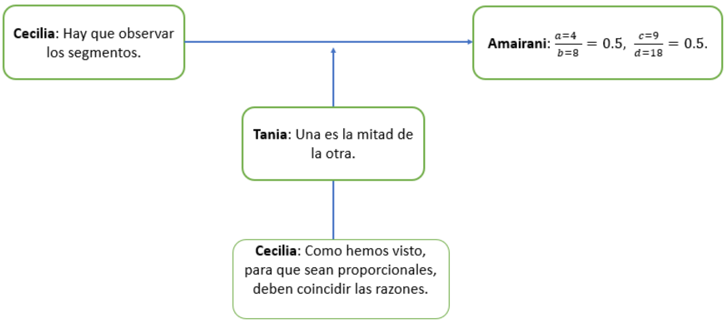
La interacción fue una de las actividades que se destacaron en esta tarea y con la cual se comprometieron ambas.

Análisis de la argumentación

En un primer acercamiento, las integrantes mencionaron analizar y comparar las longitudes y buscar un número para el que las razones fueran las mismas, así se observa en la Figura 14. Pero darse cuenta de las longitudes les permitió ver que una era la mitad de la otra y para las otras dos también ocurría lo mismo. Se hace visible un argumento regular ya que mencionan que deben observar los segmentos, identifican que ambas razones deben coincidir y su conclusión se refleja que son iguales, comparando las medidas de los segmentos.

Figura 14.

Argumentos de Tania y Cecilia en Tarea 6.



Tarea 6 (Reyna y Amairani)

De esta forma Reyna y Amairani trataron así, su tarea 6 (ver Tabla 7).

Tabla 7:

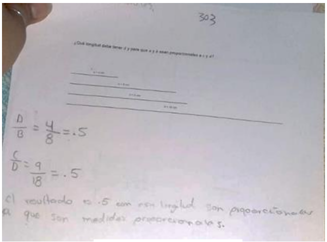
Transcripción 6

Reyna:	Esta se ve difícil.
Amairani:	Veamos. El segmento 1 mide la mitad que el 2.
Reyna:	Pero el último no sé qué tamaño es.
Amairani:	Pero el tercero mide 9
Reyna:	Entonces va aumentando lo doble.

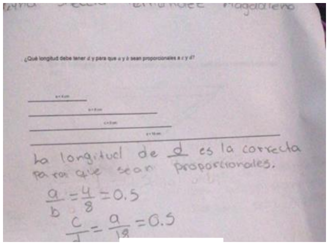
Reyna y Amairani no tenían claro lo que debían hacer, conforme se aportaban ideas entre ambas analizaban la medida de los segmentos y pudieron observar que había dos segmentos que eran la mitad de los otros. Permitiendo asegurar que, en efecto esto pasaba al realizar las comparaciones obtendrían la misma razón (ver Figura 15).

Figura 15.

Producciones de la tarea 6 por Amairani y Reina.



Amairani



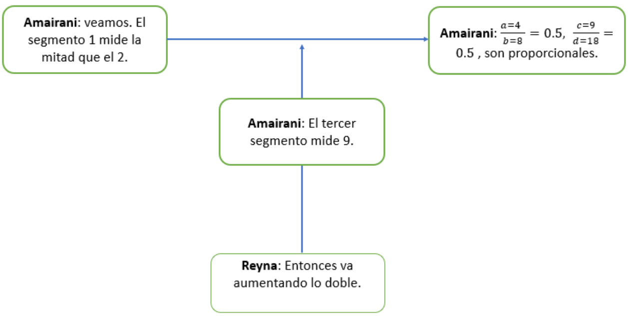
Reyna

Analizaron detenidamente la tarea, puesto que ello, permitiría encontrar, comparar y conocer la medida del segmento.

Análisis de la argumentación

Figura 16.

Argumentos de Amairani y Reyna en Tarea 6.



En la Figura 16 se observa un argumento de tipo regular ya que Amairani enfoca su atención en los segmentos, el segmento 1 mide la mitad que el 2. La aportación nuevamente de Amairani como su garantía, entonces debe suceder lo mismo para el siguiente, es decir, hay un acuerdo que le permite conocer la medida del segmento.

Conclusiones

Ventajas y limitaciones de la investigación

Una de las finalidades que tiene nuestro trabajo es contribuir en la investigación y en la práctica docente con relación al proceso de la argumentación matemática en el Nivel Medio Superior, dado que la mayoría de las investigaciones se refieren a trabajar la argumentación sólo para analizar los argumentos que los estudiantes producen y no se enfocan en el proceso de argumentación por el cual los estudiantes atraviesan. Así considero que nuestra secuencia didáctica permita beneficiar tanto a los profesores como a los estudiantes en su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Conclusiones sobre los resultados

Con base a los resultados, observamos que en su mayoría fueron argumentos regulares, los cuales se generaron durante las actividades producto de la interacción en el aula. Si bien, los alumnos muestran dificultades para solucionar tareas, tiene esto que ver también con que no analizan detenidamente el problema planteado, pero una vez identificado qué se debe hacer proceden a dar ideas, oponerse a ellas en su caso o estar de acuerdo.

En el caso de los argumentos críticos, consideramos que se hacen presentes muy poco en al tratar tareas, puesto que a los estudiantes les cuesta trabajo encontrar elementos con los que puedan formular una refutación sobre una idea o conclusión.

Prospectiva de la investigación

Algunas prospectivas:

- Los resultados presentados son un primer acercamiento a nuestra puesta en escena, desarrollaremos una segunda puesta en escena con otros grupos de estudiantes del CECYTEG Y CETIS 116 esto para ver las distintas formas de los procesos de argumentación en cada uno. Este se llevará a cabo aproximadamente en septiembre del presente año.
- Realizar un análisis cuidadoso de la futura puesta en escena.
- Compartir esta experiencia con personas que trabajan en el campo de investigación argumentativa de tal forma que podamos beneficiarnos tanto en la práctica docente como en la investigación.

Referencias bibliográficas

Aberdein, A., & Dove, I. (2013). *The Argument of Mathematics*. Dordrecht: Springer.

Banegas, J. (2013) Argumentation in Mathematics. In A. Aberdein & I. Dove (Eds) *The Argument of Mathematics. Logic, Epistemology, and the Unity of Science* (pp. 47-60). Springer, Dordrecht.

Cabañas, G. & Cantoral, R. (2011). Study in Arguments in Mathematics Classroom. A Case Study. *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) TSG24.

De Gamboa, G., Planas, N., & Edo, M. (2010). Argumentación matemática: Prácticas escritas e interpretaciones. *SUMA*. 64, 35-44.

Duval, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? México: Iberoamerica.

Goizueta, M. & Planas, N. (2012). Análisis de interpretaciones escritas del profesorado sobre la argumentación en la clase de matemáticas. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeo, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordoñez (Eds), Investigación en Educación Matemática XVI (pp.295-302). Jaén, España: SEIEM.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 396–428.

Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. Mathematics Education, 40, 427- 441.

Krabbe, ECW (2013) Arguments, Proofs and Dialogues. In: A. Aberdein e I Dove (Eds.) *The Argument of, Epistemology, and the Unity of Science*, vol 30. Springer, Dordrecht.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion "learning-as-participation" in everyday situations of mathematics classes. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 43(12), 81-90.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. In A. Bikner-Ahsbahs and C. Knipping (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods* (51-74). New York: Springer.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2011). Proof: A game for pedants? In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 213-222). Rszéskow, Polonia: ERME.

Knipping, C., & Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. In Approaches to qualitative research in mathematics education (pp. 75-101). Springer, Dordrecht.

OCDE (2016). *Marco del Evaluación y de análisis de PISA para el desarrollo: Lectura, Matemáticas y Ciencias*. OCDE.

Pfeiffer, K. (2010). A schema to analyses students' proof evaluations. En M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp.192-201.) Rszéskow, Polonia: ERME.

Planas, N. & Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado. En E. Badillo, L. García,

A. Marbá y M. Briseño (Eds.), *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas* (pp. 275.-300). Mérida, Colombia: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry.

Real Academia Española. (2019). *Diccionario de la lengua española*, (23.ª ed.). Versión en línea. https://www.rae.es/

Sánchez, E.A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes. *Revista Sigma*, *11*(1), 10-25.

Sánchez, E.A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 65-97. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33526417005

SEP. (2017). *Plan y programa de estudios para la educación básica. Aprendizajes clave para la educación integral*. México: SEP.

Solar-Bezmalinovic, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista colombiana de educación*, (74), 155-176.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Madrid: Península.

UAGro. (2010). *Plan de estudios por competencias. Matemáticas III*. Educación Media Superior. México: UAGro.

La demostración en contexto escolar: una experiencia de conjeturar en ambiente de geometría dinámica con estudiantes de nivel medio superior de la UAGro.[7]

Abril Carrillo Bello - Gema Rubí Moreno Alejandri - José Efrén Marmolejo Vega

14564240@uagro.mx

El interés central de este trabajo está en el proceso de Conjeturar. Por ello se ha elaborado una secuencia didáctica para una propiedad de la bisectriz que contemple un tratamiento metodológico que fortalezca la argumentación con vías a conjeturar en procesos de validación. Los elementos teóricos que se asumieron en el diseño fueron: la unidad cognitiva argumentar-conjeturar-demostrar en contexto escolar (Marmolejo y Moreno, 2019), los momentos didácticos propuestos por Marmolejo y Moreno (2018) -adaptación de la Teoría de la Actividad para transitar de la intuición a la formalización y la técnica del Debate Científico en las clases de Matemáticas (Legrand 1998). Se realizó una prueba piloto, cuyos resultados aún están en proceso de análisis, con 33 alumnos de Nivel Medio Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero en la unidad de aprendizaje Matemáticas III.

Palabras Clave: Argumentar, conjeturar, bisectriz.

[7] Carrillo, A., Moreno, G. y Marmolejo, J. (2020). La demostración en contexto escolar: una experiencia de conjeturar en ambiente de geometría dinámica con estudiantes de nivel medio superior de la UAGro. En M. Méndez, M. Ferrari & N. Marquina (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 1* (pp. 97-116). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México

Introducción

En la actividad matemática es de suma importancia la producción y validación de conjeturas. Ello implica que el proceso de argumentar debe enriquecerse cada vez más. De ahí que, la actividad matemática en el aula ha de "generar momentos de reflexión para que los procesos de conjeturar y argumentar aporten al desarrollo del pensamiento matemático" (Álvarez et al, 2014).

Existen diversas investigaciones en torno a la importancia de la relación entre argumentar y conjeturar. Desde el punto de vista de Larios (2003), la conveniencia de usar la demostración recae en "la necesidad de justificar conocimientos abstractos que tienen que ser validados, proporcionando simultáneamente razones sobre su plausibilidad" (p 167). En propias palabras de Crespo (2004) "la importancia de la demostración en matemática se relaciona con la racionalidad dominante en la sociedad y la cultura en la cual se desarrolla" (p.7). Esta autora menciona que el valor de la demostración en el aula varía de unos niveles educativos a otros, pero su valor general es de ayudar a comprender la necesidad de validar las diferentes proposiciones matemáticas que se aprenden. Por ello, es de especial interés "la labor del docente de matemáticas en la planeación didáctica y la gestión de los procesos de aprendizajes relativos a la demostración" (Marmolejo, Moreno y Ramos, 2019, 113).

Respecto a la pregunta *¿Por qué enseñar la demostración?*, Marmolejo y Moreno (2019) coadyuvan que "esta responde a los argumentos históricos y epistemológicos y que incide en el avance de la ciencia y de la matemática en lo particular, haciendo de ella un conocimiento relevante, sin el cual la enseñanza de la matemática sería incompleta" (p. 47).

En la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), en el Nivel Medio Superior, el Programa de Matemáticas III (UAGro, 2010), se considera relevante desarrollar ocho competencias, en particular es de interés la competencia de Argumentar centrada en la solución obtenida de un problema. Es más, con el conjunto de competencias disciplinares de matemáticas se busca desarrollar en los estudiantes el pensamiento crítico y lógico, en particular, que el estudiante "argumente y estructure mejor sus ideas y razonamientos". En esta dirección, la conexión entre argumentar y conjeturar en los procesos de validación es de interés en este trabajo. El contexto geométrico, a su vez, resulta idóneo pues permite, prácticamente de inmediato, el paso de "lo experimental a lo abstracto" (UAGro, 2010).

Sin embargo, en la práctica las propiedades geométricas son tratadas como meros algoritmos, es decir, se omite aquello que lleva a su obtención. Ello evita la experiencia de argumentar vías la conjeturación en procesos de validación. Algo que incide es la estructura de las secuencias modelo que presenta el programa de Matemáticas III (UAGro, 2010) al final de cada unidad de competencia. El desarrollo de las actividades consiste básicamente en: a) el *planteamiento* de una situación problemática (intra o extra matemática), b) una *identificación* de elementos geométricos que ya poseen los alumnos, c) "*un acuerdo*" entre profesor y alumnos de "las acciones que se llevarán a cabo para caracterizar y clasificar y conocer las propiedades geométricas", d) después se sugiere llevar a cabo una *búsqueda* de información (tarea en casa) de las propiedades y conceptos involucrados, e) ya en clase, en forma de *lluvia de ideas*, el profesor coordina la discusión con el grupo de "los resultados de la búsqueda de información" de manera que se establezcan: "las características, la clasificación, y las propiedades geométricas", y finalmente, f) con lo ya establecido se pretende que se haya logrado identificar lo necesario para *resolver* el problema que planteado al inicio. De modo que, el uso de tales propiedades adolece de significado lógico para los estudiantes y elimina por completo el propósito de la búsqueda de la verdad asequible al estudiante. De ahí que surja la necesidad de reflexionar en el proceso de elaboración de conjeturas y su relación con la argumentación.

El objetivo de este proyecto es implementar el desarrollo y evaluación de la propuesta de una secuencia didáctica para una propiedad de la bisectriz que contemple un tratamiento metodológico y que fortalezca la argumentación con vías a conjeturar en procesos de validación. En particular, se quiere obtener que los estudiantes puedan arribar a la conjetura de que en todo triángulo la bisectriz de un ángulo interno cumple que la razón de sus lados adyacente es igual a la razón de los segmentos en que ésta divide al tercer lado, a través de apelar a la intuición y la visualización dinámica.

La hipótesis del proyecto es que es factible que mediante un tratamiento metodológico derivado de la unidad cognitiva argumentar- conjeturar- demostrar (Marmolejo y Moreno, 2018), los estudiantes de Nivel Medio Superior identifiquen características esenciales de la propiedad geométrica, hasta su generalización, lo que implica haber elaborado la conjetura.

Se espera que mediante la técnica del debate científico se conduzca el proceso de aprendizaje con la mayor participación independiente de los estudiantes, con intervenciones oportunas del profesor.

Elementos teóricos

Los elementos teóricos que se asumieron en el diseño fueron: la unidad cognitiva argumentar-conjeturar-demostrar contexto escolar (Marmolejo y Moreno, 2019), los momentos didácticos propuestos por Marmolejo y Moreno (2018) -adaptación de la Teoría de la Actividad-para transitar de la intuición a la formalización y la técnica del Debate Científico en las clases de Matemáticas (Legrand 1998).

Argumentar-conjeturar-demostrar en contexto escolar

La demostración matemática en contexto escolar plantea un doble desacuerdo, el de su pertinencia de ser tratado o no en el ámbito escolar, y por otro lado, se discute si lo dominante de su enseñanza es la argumentación, implicaría o no un obstáculo epistemológico para acceder a demostrar.

Sobre la práctica del que tan solo argumentar genera un obstáculo epistemológico es la postura que sustentan Duval (1999); Balacheff (1982); Arsac (1987); Fishbein (1987) entre otros. Por otra parte, se afirma que entre argumentar y demostrar existe una unidad cognitiva (Boero, 1999; Marmolejo y Moreno, 2019), y con ello no ha lugar la hipótesis del obstáculo epistemológico. Desde esta última perspectiva, es que se establece la secuencia didáctica a desarrollar.

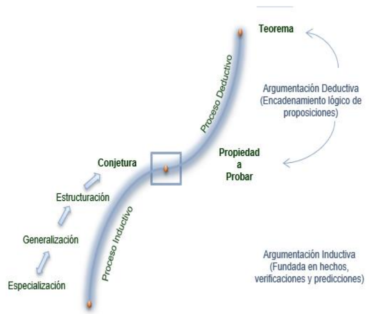
Es necesario aclarar, que para ser pertinente el tratamiento de la demostración en la escuela, ha de considerarse que tal como está definida en la matemática científica no es la forma en que como objeto de enseñanza deberá tenerse, es decir, habrá de realizarse un proceso didáctico que, si bien no es posible hacerlo de manera integral, si lo es, si consideramos los elementos invariantes de ella como los son sus funciones, de explicar, argumentar, conjeturar, probar y producir razonamientos lógico deductivos, conservando con mayor énfasis su función esencial que es la de generar veratitividad (garantizar la verdad de una proposición).

En la relación argumentar- demostrar como la unidad cognitiva se ve la necesidad de resaltar como eslabón entre ellos: la conjetura. Marmolejo y Moreno, (2019) denominan la unidad cognitiva argumentar- conjeturar- demostrar, al proceso que transcurre en dos etapas. En la primera, se da la producción de conjeturas mediante la exploración, la discusión y sistematización de los enunciados construidos. En la otra etapa, se busca la construcción de la prueba mediante los resultados obtenidos en las exploraciones realizadas y un encadenamiento reglado de argumentos. Así, argumentar-conjeturar- demostrar se constituye en el orden de las tareas a desarrollar para en primer término elaborar la conjetura, para lo cual la argumentación es esencialmente de carácter inductivo. Una vez constituida y fortalecida la conjetura, esta estará en condiciones de ser probada, iniciándose así encadenamiento de argumentos deductivos.

Se asume a la argumentación con base empírica científica encauzando a estas hacia la formación de conjeturas, potenciando el paso de la conjetura a la prueba, la veratitividad de las conjeturas debe darse del consenso a la prueba. Ello implica que si bien argumentar y demostrar tiene una relación consustancial a su existencia la una precede a la otra, pero el fin de ambas es la búsqueda de la verdad (Figura. 1).

Figura 1.

Esquema de los procesos que intervienen en la argumentación inductiva y em la deductiva



Nota: Tomado de Marmolejo y Moreno, (2010)

En específico, la diferencia entre la demostración y la argumentación radica básicamente en que la primera requiere de un proceso deductivo de la no contradicción para declararse correcta o incorrecta en cambio, la segunda, se valida por la plausibilidad aceptada entre los dialogantes (alumno- alumno- profesor) y es tanto más verdadera según el grado de pertinencia (Marmolejo y Moreno, 2019).

En cuanto a la Argumentación, Marmolejo y Moreno (2019) diferencian:

Argumentación inductiva: Está "fundada en hechos, verificaciones y predicciones utilizando como recursos los procedimientos heurísticos durante el proceso de estructuración de conjeturas haciendo uso también del acervo matemático ya instalado en su campo semántico. Su validez recae en la plausibilidad aceptada entre los dialogantes y depende del sujeto que la realiza. Tiene como objetivos: la construcción de conjeturas, mediando en ello, la deliberación del acuerdo, la transmisión de una convicción y la justificación" (p.56).

Argumentación deductiva: Resulta del encadenamiento lógico de proposiciones conforme a las reglas de la lógica proposicional es así que resulta ser correcta o incorrecta. El valor lógico de una argumentación deductiva es intrínseco a ella y se sustrae de la persona que la realiza. Este tipo de argumentación es independiente del sujeto.

El proceso de *Argumentar-Conjeturar-Demostrar* se da en dos momentos. El primer momento se da la argumentación inductiva con el desencadenamiento de argumentos que van de explicar hechos específicos mediante la experimentación y estos logran ser generalizados a nivel convicción pertinente. En el segundo momento dichos argumentos se perfeccionan hasta la estructuración de la conjetura alcanzando la condición de enunciado de una proposición susceptible a ser probada, bajo un encadenamiento lógico de argumentos deductivos argumentos hasta el punto de perfeccionar el enunciado de la conjetura, incorporando el lenguaje y simbología más próximos a la proposición matemática de la que sea equivalente, es decir, la demostración. La conexión de la argumentación deductiva con la demostración se ubica en el segundo momento.

Momentos didácticos para la secuencia

La secuencia didáctica a desarrollar se fundamenta en el principio de la *actividad* de Galperin (1992), extendido por Talízina (2002). Los que refieren las fases en que transcurre la formación por acciones de una actividad, a saber: formación de la base orientadora de la acción; formación del aspecto material de esta acción; formación de su aspecto verbal externo; y formación de esta acción como un acto mental a través del lenguaje interiorizado. Para los efectos del diseño de la secuencia didáctica, se asume lo expresado por Marmolejo y Moreno (2018) que presentan una adaptación de los principios de la teoría de la actividad denominando a las fases como momentos didácticos, esto son: acciones materializadas, acciones verbalizadas y acciones para la formalización; orientadas todas ellas de la intuición a la formalización.

La formación del aspecto material de la acción se realiza con material concreto que en este caso será el papel vegetal, permitiendo una identificación y reproducción de las relaciones esenciales de la propiedad a conjeturar, esta es la etapa en que los alumnos trabajan de manera colaborativa, así, el alumno asimila el contenido de la acción, en tanto el profesor toma el control y guía de esta etapa. Talízina (2002), menciona que el alumno asimila la acción como material o materializada, desplegada o generalizada, pero evitando su automatización, dicho de otra forma, siendo una transición, es decir, combinar lo verbal con lo que se realice en la práctica.

El segundo momento didáctico referido a la verbalización, se inicia en el momento anterior pero ahora se caracteriza la propiedad que se construye y generaliza con uso del software dinámico en el que se describe el significado de las representaciones idealizadas a partir de la acción materializada previa. Al respecto Marmolejo y Moreno (2018) citando a Galperin (1992) menciona que, en el proceso de la generalización de conceptos se producen tres cambios esenciales: "la acción verbal se estructura no solo como un reflejo real de la acción realizada con el objeto, sino también como una comunicación verbal de la misma; el concepto se constituye en la base de la acción, haciendo a un lado los limitantes que el objeto pueda presentar; y la asimilación en la forma verbal, se observa en el habla, la cual es la portavoz de todo el proceso, puesto que no solo es la comprensión de las palabras empleadas, sino además estas palabras llevan el contenido de la tarea y de la acción"(p.155) Adquiriendo una nueva forma el lenguaje interno.

Por último, tenemos la etapa de la interiorización de la acción como un acto mental conlleva la tarea de comunicación es sustituida por el habla para sí, suscitando de este modo la reflexión según Galperin (1992). Aquí es donde se genera la caracterización de lo construido, reflexionando sobre su significado y ascenso a un lenguaje propio, como mencionan Marmolejo, Moreno, Hernández y Bahena (2009) se alcanza una mejor comprensión de lo hecho que es prácticamente formalizada, y que ahora puede ser interiorizado conscientemente.

Lo anterior visto en la perspectiva del objetivo del proyecto debe inferirse que los tres momentos didácticos aludidos tomarán forma en el proceso de argumentar- conjeturar- demostrar, dando fuerza a los argumentos a partir de las reflexiones logradas con los estudiantes.

Debate científico en la Clase de Matemáticas

También es esencial la intervención de una técnica para la generación y gestión de la argumentación. El debate científico en las clases de matemáticas de Legrand (1998), se instaura entre los estudiantes a partir de situaciones problemáticas introducidas por el profesor, o a propósito de cuestiones o conjeturas que los mismos estudiantes aportan. Consiste en un juego de búsqueda de lo que es verdad asumiendo un compromiso de sinceridad donde se toman todas las intervenciones de los estudiantes. El debate tiene elementos importantes que lo conforman (Figura 2):

Figura 2.
Esquema del Debate científico en la clase de matemáticas

Debate Científico en la clase de Matemáticas

Elementos que lo conforman

El status de los enunciados	Los enunciados son esencialmente conjeturales. Toda propuesta de conjetura debe ser sometida a un juicio de verdad o pertinencia, esto de acuerdo con el contrato didáctico. Quienes aprueban o no la pertinencia o veracidad de los enunciados son los alumnos.
Contrato didáctico	Es el que "legaliza el hecho que todos los alumnos pueden someter sus conjeturas en clase" de forma explícita. Permite que los alumnos sepan que el profesor está escondiendo la verdad de manera voluntaria. En la negociación entre alumnos y profesor, se establece que todo lo que se dice es cuestionable y puesto a juicio.
Papel del alumno	Va a aprender escuchando y analizando con sagacidad los propósitos de un par. Va a aprender dirigiéndose directamente a sus pares para convencerlos de lo bien fundamentado de sus aserciones, sin solicitar a priori la mediación del profesor.
El triple juego del profesor	***Epistemológico:*** se da entre la 1) *supervisión* y un 2) *control* epistemológico del desarrollo del debate entre los estudiantes. ***Didáctico:*** Motivar a los estudiantes a entrar a situaciones problemáticas conservando un cierto nivel científico en sus argumentos. También, hacer uso del pintarrón como recurso didáctico con el fin de tener bajo control el ritmo de la argumentación del grupo, donde la idea escrita, y completada de los comentarios externos se disocie más naturalmente de su locutor pues se convierte en un intermediario inerte entre el locutor y los contradictores. Así, las ideas producidas se van constituyendo como del grupo y no de una persona en particular y al mismo tiempo construir una memoria de clase. ***Social***: Se centra en la conducción de la interacción de un grupo social. De ahí que sea indispensable: evitar que el debate se hunda en gritos, promoviendo la participación de todos, con respeto y tolerancia; promover como herramienta de regulación del debate "el contraejemplo, suficiente para refutar una conjetura"; y la restitución de su propio estatus social.
La institucionalización	Abandona neutralidad epistemológica y se le da un valor a lo que es erróneo. se reafirman las ideas, conjeturas, aportaciones, construcciones que se consideren de utilidad sin importar si son falsas o verdaderas. Existe un triple conocimiento institucional: Detectar lo que es falso, etiquetar procedimientos que permitan neutralizar las ideas falsas o bien conservar lo que después puede ser probado como verdadero, y, adquirir un sentido crítico agudo.

El principio básico del debate es que para aprender matemáticas con eficacia se ha de asumir el papel de un matemático instaurado en una mini comunidad científica (aula de clases). En este ambiente, el *juego del alumno* es aprender escuchando y analizando con sagacidad los propósitos o enunciados de un par y dirigirse directamente con sus pares para obtener el convencimiento de ellos sin ayuda del profesor, dando así una negociación didáctica. Sin embargo, *el estatus de los enunciados* es esencial en este juego, son esencialmente conjeturables y toda propuesta de conjetura debe ser sometida a un juicio de verdad o pertinencia. Así, quienes aprueban o no la pertinencia o veracidad de los enunciados son los alumnos.

En propias palabras de Legrand (1998) e*l contrato didáctico* es el que "legaliza el hecho que todos los alumnos pueden someter sus conjeturas en clase" (p.3). Este contrato didáctico da la pertinencia que quien emite un enunciado está sujeto fuertemente a ser valorado si su enunciado es verdadero o no, también se somete sin temor a ser expuestos al revelar su enunciado. El contrato didáctico debe ser explícito.

Mientras tanto, *el juego del profesor* es una tripleta de "roles": el *epistemológico,* el *didáctico y* el *social.* En el primero, el profesor es muy cuidadoso y observador en torno a todo lo puesto a discusión de matemáticas, siendo mediador de argumentos y percibiendo sus diferentes niveles, con esto ayudando a captar lo que realmente está en juego y siendo pertinente en la elección de qué enunciado tomar primero, en este rol el profesor no puede ayudar a la clase a clarificar sus dudas ni validar como ciertas o no sus respuestas. El rol didáctico trata primordialmente de introducir a los estudiantes en situaciones problemáticas manteniendo una postura imparcial, tomando de esto ideas fuertes para desarrollar muy linealmente su argumentación personal, lo cual no debe dejar que el debate se desvíe al ritmo de su propia comprensión o de los mejores estudiantes. Y, por último, en su rol social el profesor es encargado de mantener a la clase sin caer en el juego, teniendo una imagen reservada, su presencia es organizar y evitar que los participantes del debate caigan en un ambiente de gritos y desorden. Por otra parte, tenemos la perspectiva del rol social como coordinador donde debe redefinir su estatus social, es decir, renegociar el contrato didáctico habitual.

Finalmente, en *la institucionalización* se retoman las ideas, conjeturas, aportaciones, construcciones que se consideren de utilidad sin importar si son falsas o verdaderas. Es aquí donde el profesor es "profesor" sin ninguna postura y es donde reafirma que tal razonamiento, tal método, tal resultado desemboca o no en tal o cual situación.

Elementos metodológicos

Esta investigación es de corte cualitativo (Cerezal, 2012) se caracteriza porque son estudios de profundidad aplicados a muestras pequeñas, en este caso a un grupo de alumnos, e interpretando lo que se quiere investigar, en este caso a través de los elementos teóricos antes señalados. A continuación, se muestran las características de los participantes y el contexto, una síntesis de las actividades que componen la propuesta didáctica. También, los aspectos que se tomaron en cuenta para la recolección de datos y aspectos generales de lo que se tiene proyectado para su análisis.

Participantes y contexto

Este reporte se basa en una prueba piloto de la secuencia didáctica en el marco de una Estancia, como auxiliar docente de la Unidad de Aprendizaje Matemáticas III, realizada en la Preparatoria 2 de la UAGro.

El contenido que corresponde al programa de Matemáticas III (UAGro, 2010), es Geometría Euclidiana. El tratamiento que se le da a la bisectriz se encuentra en el tema "Líneas notables de un triángulo" y solo orienta como "componente procedimental" de la Competencia I, a este respecto, la resolución de problemas que impliquen el cálculo de ángulos y lados de un triángulo utilizando congruencia y semejanza. No sugiriendo qué propiedades relativas a la bisectriz se tratarán en el aula.

La propiedad geométrica a tratar, en esta secuencia didáctica, es: *"Para todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interno se cumple que la razón de sus lados adyacentes es igual a la razón entre los segmentos en que la bisectriz divide al tercer lado"* (Bulajich & Gómez, 2004).

El grupo estuvo conformado por 33 estudiantes en el turno matutino. En el rol de auxiliar docente, se acompañó los 4 módulos de 50 minutos a la semana, durante todo el semestre. Se observaron algunas ventajas de la estancia en la experimentación, como: crear un vínculo entre alumnos, auxiliar docente y profesor; identificar la deficiencia en temas de las actividades del aseguramiento de nivel de partida y tener la oportunidad de reforzarlas; adquirir confianza y manejo del grupo para desarrollar actividades; tener práctica para cubrir en tiempo y forma las actividades; identificar la manera en que los alumnos congenian y se sienten gustosos de trabajar.

Estructura de la Secuencia Didáctica

De manera preliminar a la secuencia didáctica, a modo de aseguramiento del nivel partida, se diseñaron 6 actividades, 5 para trabajo individual y la última en equipos. Para cada una de ellas se estimó un módulo de 50 minutos. Durante el desarrollo de las actividades se fomentará que los alumnos compartan comentarios, justificaciones, argumentaciones de sus soluciones.

Las actividades correspondientes a la secuencia didáctica, en sí, están diseñadas para dos módulos de 50 minutos cada uno. Su estructura está determinada por tres momentos didácticos (Marmolejo y Moreno, 2018): *Apelando a la intuición, Hacia la visualización dinámica y Hacia la formalización* (Figura 3).

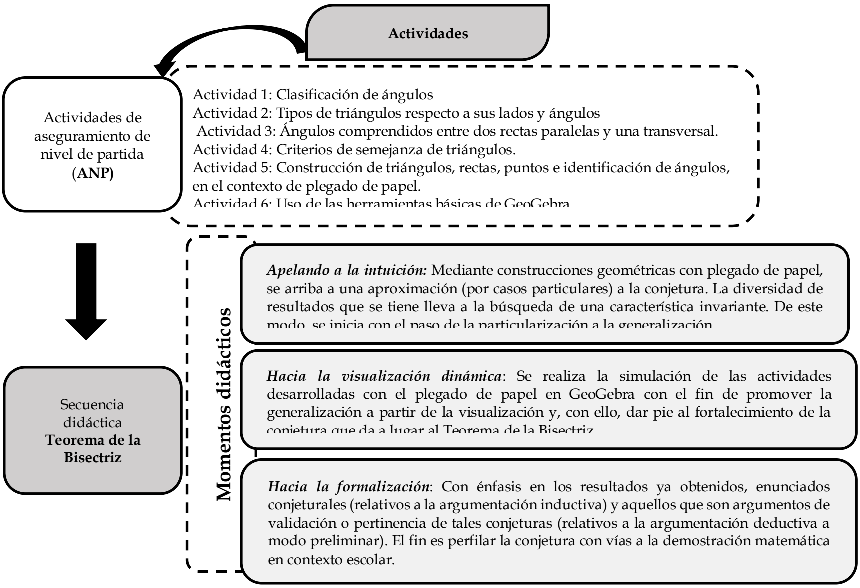
Apelando a la intuición. En este momento didáctico la elaboración de conjeturas se motiva a través del doblado del papel vegetal. Al solicitar plegado por cada estudiante se pretende generar una diversidad de resultados y, así, facilitar la identificación de rasgos invariantes. Se espera que surjan, en la construcción de los triángulos, tanto isósceles como los escalenos. También en este momento didáctico se instaura por lapsos cortos la técnica del debate científico donde los estudiantes son los protagonistas de este debate. Por ejemplo, surge la necesidad del debate si los alumnos en la identificación del tipo de triángulo dando argumentaciones que justifiquen su identificación. Otro ejemplo del uso de la técnica del debate se da después de haber realizado las construcciones indicadas sobre los triángulos. En este caso, el profesor abre la discusión acerca la cantidad de triángulos se observan, para lo cual se espera que obtengan dos casos (caracterizar cada caso es el punto aquí): a) que identifiquen tres triángulos y b) que obtengan más de tres. El momento en que se les indica a los estudiantes identificar triángulos semejantes hace que esto propicie el inicio de la actividad de elaborar la conjetura objetivo. El estatus del enunciado conjetural que aquí puede surgir aún es preliminar, tomando en cuenta que los enunciados producidos por los estudiantes son conjeturales, relativos a la argumentación inductiva. Y otros son argumentos de validación o pertinencia de tales conjeturas, relativos a la argumentación deductiva (a modo preliminar). El profesor a partir de este momento didáctico (y en el segundo también) asume tres roles: epistemológico, didáctico y social que desempeña de manera simultánea.

Hacia la visualización dinámica. Este momento didáctico se caracteriza por el cambio del ambiente de papel a al ambiente dinámico. El software de geometría dinámica es usado con la intención de modelar lo realizado con el plegado de papel. La ventaja de poder hacer uso de un software que permite "mover" los puntos del triángulo, para así formar y observar con más claridad cualquier tipo de triángulo o las características invariantes, es explotada en esta propuesta. Este ambiente permite visualizar y/o fortalecer la conjetura (pasando casos particulares a una multitud de casos, potenciando la generalización) hallada con ayuda de las herramientas adecuadas para identificar los rasgos invariantes y la validación de las mismas (en mayor grado). Tanto en este momento como en el anterior: la argumentación que se prevé es inductiva; la tripleta de roles del profesor sigue surgiendo de manera simultánea; y se sigue utilizando la técnica del debate científico. Por ejemplo, cuando se le pide al alumno sobre los triángulos semejantes, las preguntas detonantes son: ¿qué características observas en los triángulos sombreados?, ¿qué tienen en común?, ¿qué argumento geométrico valida tu respuesta? En esta parte, hay oportunidad para que se fortalezcan las conjeturas elaboradas en el momento anterior y los argumentos de validación respectivos.

La formalización. Finalmente, en este momento didáctico, se pretende llegar a la institucionalización. De tal manera que sigue habiendo un debate donde se da a conocer qué argumentos son verdaderos. En particular, es en este momento en el que los estudiantes reconocen que sus aportaciones fueron de mucha ayuda independientemente si estas fueron falsas o verdaderas. Además, el profesor se desprende de su tripleta de roles y retoma las producciones de los alumnos y, más aún, aporta, refuerza o esclarece el significado institucional subyacente a lo trabajado. Los argumentos que surgen el fortalecimiento de la conjetura se perfilan hacia la validación de la misma, en una tendencia a obtener una demostración en contexto escolar.

Figura 3.

Estructura de la propuesta didáctica



En los tres momentos ha de estar instaurado el Debate Científico para la elaboración, refutación y fortalecimiento de conjeturas. Las conjeturas que se espera que surjan son de dos tipos: a) Identificación de rasgos invariantes, relativos a argumentación inductiva, b), Validación de tales identificaciones, perfilados hacia la argumentación deductiva.

Recolección de datos

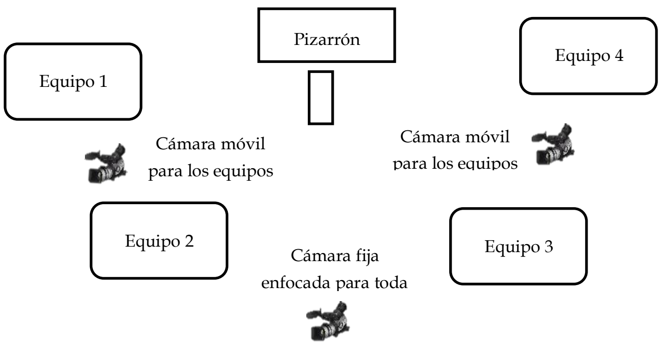
En sintonía con Chan, Carmel, & Claker (2019) el video es una herramienta de investigación que proporciona un registro de actividad en el aula rica en detalles y oportunidades para volver a hacer análisis.

Para la recolección de datos se hizo uso de la videograbación con tres cámaras. En la figura 4 se muestra la forma en la que organizaron las cámaras.

También se recolectó una grabación de audio por cada equipo, fotografías, hojas de trabajo, la recolección de los productos del doblado de papel y el producto de las construcciones en GeoGebra.

Figura 4.

Arreglo de las videocámaras.



Análisis de datos

Para el análisis de datos se tiene pensado utilizar un instrumento de observación que contenga características y criterios correspondientes a los elementos teóricos y metodológicos. Aún está en proceso de construcción. Este instrumento servirá para valorar el estatus de los argumentos que surjan, así como los roles del profesor y los estudiantes.

Reflexión preliminar

Hasta el momento solo se ha desarrollado una prueba piloto de la secuencia didáctica. En la implementación, se procuró contar con todos los recursos didácticos, el espacio, y mobiliario adecuado, pese a las dificultades que se tuvieron, fue gratificante desarrollar esta actividad pues permitió a los estudiantes profundizar un concepto matemático, mediante algo tangible y observarlo dinámicamente en el software de GeoGebra y en grupo construir una conjetura. También el desarrollo de esta actividad me permite ver las cosas a modificar, los detalles que aún faltan por pulir, como por ejemplo la puntualización del planteamiento de preguntas, la enfatización de los conocimientos previos, la observación de los detalles.

En el *primer momento didáctico* se formaron equipos con seis alumnos, pero la producción de resultados fue de manera individual, se trabajó con material concreto que fue el papel vegetal, mediante indicaciones del profesor se realizaran dobleces sobre el papel, entre sus equipos compartían dudas, comentarios, opiniones tanto de los construido como de lo observado. En ese momento los alumnos encontraron variantes de sus construcciones, a partir de ello empezaron a argumentar y crear sus propias conjeturas al darles respuestas a las preguntas intervenidas por el profesor quien desempeñaba una tripleta de roles aleatoriamente.

En *el segundo momento didáctico* siguieron reunidos en equipos (los mismos equipos del primer momento didáctico), cada equipo trabajó con un computador, ahí se reconstruyó de manera virtual en el software de GeoGebra lo trabajado con el papel vegetal, el resultado de este momento fue validar o refutar algunas de las argumentaciones que aportaron los alumnos en el primer momento, fue de gran utilidad el uso de este software pues permite mover los vértices del triángulo para observar los diferentes casos de la construcción indicada por el profesor.

En el *tercer momento didáctico* los alumnos siguieron reunidos en equipos, donde los equipos compartieron en forma grupal su resultado, este fue el momento donde el profesor toma a manera de "lluvia" los enunciados de los equipos, exponiendo de manera grupal sus argumentaciones y consolidando una conjetura.

En esa prueba piloto se pudieron obtener algunos aspectos a tomar en cuenta para un rediseño, tanto positivos como negativos:

- En necesario garantizar el aseguramiento del equipo, mobiliario e instalaciones, pues permite el desarrollo de la secuencia didáctica en un ambiente adecuado.
- El énfasis de las actividades del aseguramiento de partida es de vital importancia, ya que potencializa con mayor probabilidad un resultado eficaz.
- El acompañamiento, como auxiliar docente, durante el semestre completo fue de gran apoyo para conocer e interactuar con mayor libertad con el grupo.
- El prever material adecuado para las actividades, también es indispensable. En este caso fue importante ya que se utilizó el papel vegetal y el software de GeoGebra para poder desarrollar la secuencia didáctica.
- El planteamiento de las preguntas debe ser más puntual y específico. En esta prueba piloto se observó que el planteamiento de las preguntas se llevó a confusión. El replanteo servirá para evitar situaciones como estas y a que se tenga una mejor comprensión de lo que se pretende realizar.
- Esta prueba piloto permitió hacer una elección para desarrollar la secuencia didáctica con algunos del grupo implementando un criterio de selección, y así extraer algunas intervenciones para su análisis.
- Utilizar y mostrar la técnica del debate científico en las actividades del aseguramiento de nivel de partida fue provechoso porque permitió instaurar en ellos esta técnica y crear un ambiente conocido (mini comunidad científica) entre los estudiantes (científicos) al desarrollar las actividades.

Por ello, el quehacer para la mejora de un rediseño requerirá de un replanteamiento de preguntas, un aseguramiento de apoyo de mobiliario, instalaciones y materiales. Respecto a la parte de la ejecución de la secuencia didáctica convenga más hacer mucho hincapié en instaurar en las actividades del aseguramiento de nivel de partida la técnica del debate científico y hacer un criterio de selección de algunas intervenciones de algunos alumnos para el análisis de los datos.

Referencias bibliográficas

Álvarez, I., Bautista, L., Carranza, E. & Soler-Álvarez, M. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas 85*, 75-90

Arsac, G. (1987). L´origine de la demostración. *Recherches en Didactiqué des mathematiques 8*(3), 267-312.

Bulajich, R. & Gómez, J. (2004). *Geometría, cuadernos de olimpiada de Matemáticas*. México, D.F.: UNAM.

Balacheff, N. (1982). Preuve et demostratión en mathematiques ou collage. *Recheches en didactiqué des mathematiques*, 3, 261-304.

Boero, P. (1999). Argumentación y demostración. Una relación compleja, productiva e inevitable en la Matemáticas y la Educación Matemática. *Preuve*.http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html

Cerezal, J. (2012). *La investigación Pedagógica: Un Apoyo al Trabajo del Maestro*. Iztapalapa, México: CEIDE.

Clarker, D. & Chan, M. (2019). Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.) *Problematizing Video as Data in Three Video-based Research Projects in Mathematics Education* (pp. 199-218). Hamburgo, Germani: Springer Open.

Crespo, C. (2004) Argumentar Matemáticamente: su importancia en el aula. En J. González (Ed.) *II Congreso Virtual de la Enseñanza de las Matemáticas CVEM* (pp.1-7). México: Iberoamericana.

Duval, R. (1999) *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Iberoamérica.

Fishbein, J. (1987) *Intuition in science and mathematics*. Holanda: CIP.

Galperin, P. (1992). The problem Of Activity in Soviet Psychology. *Journal of Rusian and East European Psichology*, 30(4), 37-59.

Legrand, M. (1998). The Debat Scientifique in cour the Mathematiques. *REPERES- IREM*, 10, 123-158.

Larios, V. (2003). Si no demuestro…¿enseño matemática? *Educación Matemática,* 15(2),163-168.

Marmolejo, E., & Moreno, G. (2019). Demostración en Contexto Escolar. En E. Marmolejo y G. Moreno (Eds.) *La Demostración Matemática en Contexto Escolar* (pp. 56–57). Chilpancingo de Los Bravos, Gro., México: UAGro.

Marmolejo, E., Moreno, G., & Ramos, V., (2019). La demostración Matemática en contexto escolar: concepciones de profesores de bachillerato. En E. Marmolejo y G. Moreno (Eds.) *La Demostración Matemática en Contexto Escolar* (pp. 113–141). Chilpancingo de Los Bravos, Gro., México: UAGro.

Marmolejo, E., & Moreno, G., (2018). De la intuición a la formalización, el caso de las cónicas. En A. Contreras (Ed.) *Acercamientos a la ciencia* (pp. 153-179). Chilpancingo de Los Bravos, Gro., México: UAGro.

Marmolejo, E., Moreno, G., Hernández, S., & Bahena, A., (2009). Construcciones geométricas: de la intuición a la formalización. El caso de las cónicas. En P. Lestón. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 229-237). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Talízina, N. (2002). La teoría de la formación de las acciones mentales de P. Y. Galperin. *Conferencia dictada en el seminario internacional de psicología, Actualidad, aplicaciones y perspectivas de la teoría histórico-cultural*; Puebla, México.

Universidad Autónoma de Guerrero, UAGro (2010). *Programa de Estudios. Matemáticas III. Nivel Medio Superior.* UAGro: México

.

La probabilidad en el bachillerato universitario: experiencia en una situación de geometría[8]

Nayely Gutiérrez Villa - José Marcos López Mojica †

17105@uagrovirtual.mx

El presente informe de investigación se desprende de uno más amplio que procura caracterizar la comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en el sistema del nivel medio superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. La pregunta que aquí se responde es ¿cuáles nociones de probabilidad surgen en estudiantes del tercer semestre del bachillerato universitario en una situación de geometría? Para lo anterior se aplican Tres Ejes Rectores (epistemológico, cognitivo y social) como elementos teóricos, en una actividad de enseñanza sobre el trazo aleatorio de rectas dado cierto número de puntos. Los instrumentos para la experiencia de enseñanza fueron: guión de clase y hojas de control para los alumnos, como técnica se aplicó la videograbación y su transcripción para su posterior análisis. Los primeros hallazgos sugieren una ausencia de la probabilidad en el plan de estudio del nivel educativo en cuestión y su desvinculación con la estadística; de la enseñanza, con los desempeños de los estudiantes, se propone una caracterización de la comprensión para desarrollar del pensamiento probabilístico.

Palabras Clave: Probabilidad, comprensión, bachillerato, experiencia de enseñanza

---

[8] Gutiérrez, N. y López, J. (2020). La probabilidad en el bachillerato universitario: experiencia en una situación de geometría. En M. Méndez, M. Ferrari & N. Marquina (Eds.). *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 1* (pp. 117-136). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México.

1. Introducción

Uno de los fenómenos actuales que vive la sociedad es el acceso inmediato a una gran cantidad de información. Esto ha llevado a crear tendencias en la educación que promuevan la interdisciplinariedad. Una de ellas es la llamada STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), en cuyos pilares están las matemáticas. En ese sentido, una cultura hacia la probabilidad y la estadística del ciudadano promovería un razonamiento estocástico. El término alfabetización probabilista (cultura probabilista o cultura básica en probabilidad) hace referencia a la importancia del conocimiento probabilístico elemental en los ciudadanos y para su interacción en la vida cotidiana (Batanero 2005, 2006; Sánchez 2009). Gal, por su parte, menciona la necesidad de una adecuada cultura estadística, ya que: (1) la probabilidad es una parte importante de la estadística, que sirve como base para estudiar temas más avanzados; (2) ayuda a preparar para la vida cotidiana, porque se identifican eventos aleatorios y fenómenos de azar, en el ámbito personal y profesional (Gal, 2005, tomado de Rodríguez, Díaz-Levicoy y Vásquez, 2018).

En exploraciones recientes se ha comprobado poca importancia al contenido de la probabilidad y que se refleja en los planes y programas de estudio desde el nivel preescolar hasta el bachillerato (López-Mojica, Ojeda y Salcedo, 2018). Lo anterior no está alejado a lo que se presenta en el sistema bachillerato de la UAGro, pues hay una incongruencia entre las competencias disciplinares para la unidad temática “El azar y su medida” con los componentes de competencia conceptual y procedimental para estos temas.

Dado lo anterior, se analizó el programa de estudio de la unidad de aprendizaje “Estadística” que se imparte en el cuarto semestre del bachillerato de la UAGro, según el nuevo modelo educativo (UAGro, 2010). Con el fin de identificar en una primera aproximación la unidad relativa a la probabilidad.

La unidad de aprendizaje "Estadística" está conformada por tres unidades temáticas: 1) El azar y su medida, 2) Estudio de una variable y 3) Estudio de dos variables. Las dos últimas están enfocadas a la estadística descriptiva, mientras que en la primera contiene conceptos sobre probabilidad (Tabla 1).

Tabla 1.

Contenido temático de la unidad de aprendizaje de Estadística

Unidades de competencia		
El azar y su medida	**Estudio de una variable**	**Estudio de dos variables**
La probabilidad	Población y muestra	Tablas de doble entrada
Experimento o fenómeno aleatorio	Tipos de muestreo	Gráficas para datos bivariados
Espacio muestral	Tipos de variables y sus escalas	Asociación lineal entre dos variables cuantitativas
Técnicas de conteo	Tablas de distribución de frecuencias	Asociación entre dos variables cualitativas
Variable aleatoria	Medidas numéricas descriptivas	Regresión lineal simple
Distribución Binomial	Técnicas gráficas	
Distribución Normal		

Nota: Adaptado del programa de estudios de la unidad de aprendizaje de Estadística (UAGro,2010)

De acuerdo con la distribución de temas se identifica que en la Unidad 1 "El azar y su medida" está lo concerniente a la probabilidad. En la tabla 2 se muestra a detalle esa unidad de competencia, los componentes de competencia de la unidad de temática en cuestión se clasifica en tres secciones, primera sección denominada Conceptuales, segunda sección Procedimentales y tercera sección Actitudinales, en la cuales, en la segunda sección en la se encontró el tema de estudio

"Distingue los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo de la probabilidad", el cual es referente al contenido para su posterior análisis en este documento (ver tabla 2).

Con lo consultado hasta el momento es de interés responder aquí *¿cuáles nociones de probabilidad surgen en estudiantes del tercer semestre del bachillerato universitario en una situación de geometría?*, plantear y responder una pregunta de esta naturaleza permitirá identificar nociones previas a los conceptos formales antes de su introducción en la unidad de aprendizaje correspondiente. Autores como Heitele (1975) y Fischbein (1975) señalan como elemento importante el desarrollo de nociones probabilísticas tan temprano como sea posible, en ese sentido se consideró primordial iniciar en un curso de matemáticas previo. Por lo tanto, el objetivo del proyecto es caracterizar el enfoque frecuencial de la probabilidad en el sistema de nivel medio superior de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Tabla 2.

Contenido temático en la unidad de competencia "El azar y su medida"

COMPONENTES DE COMPETENCIA		
CONCEPTUALES	***PROCEDIMENTALES***	***ACTITUDINALES***
Probabilidad	Define la probabilidad	Establece relaciones positivas con sus compañeras.
Experimento o fenómeno aleatorio	Identifica algunas aplicaciones de la probabilidad	Respeta los compromisos de trabajo adquiridos
Espacio muestral	Identifica y describe las variables aleatorias	Recolecta con precisión los datos necesarios para resolver un problema
Técnicas de conteo	Resuelve problemas que involucran probabilidades utilizando la distribución Binomial	Es disciplinado al registrar las observaciones de un experimento.
Variable aleatoria	Expresa el significado de fenómenos y/o experimento aleatorio	Al investigar un hecho analiza con objetividad las fuentes de información.
Distribución binomial	Distingue los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo de la probabilidad	

Distribución normal	Describe y construye espacios muestrales Resuelve y representa eventos aleatorios Aplica las reglas de la técnica de conteo Calcula probabilidades de eventos aleatorios

Elementos teóricos

Los elementos teóricos de la investigación se ajustan a la propuesta de *Tres Ejes Rectores* señalados en Ojeda (2006): *epistemológico*, *cognitivo* y *social*. La cual consiste en estudiar la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (conceptos de probabilidad y estadística) en el sistema educativo mexicano (Ojeda, 2006). Para el informe que aquí se presenta nos centraremos en el eje epistemológico, éste se orienta por el conocimiento sobre el azar, la probabilidad y la estadística.

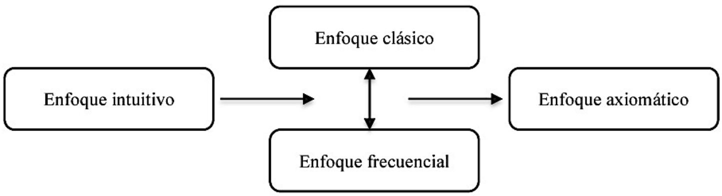
Por lo tanto, en el ***eje epistemológico*** el primer referente es Heitele (1975) que propone diez ideas fundamentales de estocásticos como guía para un currículo en espiral que parta de un plano intuitivo y arribe a uno formal, para garantizar de cierta manera continuidad en el conocimiento. Su sustento son los estudios del origen de la idea de azar en el individuo (Piaget e Inhelder, 1951), el desarrollo de la teoría de la probabilidad y el desempeño de los adultos en situaciones de incertidumbre (Heitele, 1975). Para el autor una idea fundamental es "aquella que proporciona al individuo modelos explicativos tan eficientes como sean posibles en los distintos niveles cognoscitivos y que difieren en su forma lingüística y niveles de elaboración no de manera estructural" (Heitele, 1975, pág. 2; traducción Ojeda, A. M.).

Las ideas fundamentales son: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números y muestra.

Por otra parte, López-Mojica y Aké (2019) establecen que para fomentar una comprensión de la probabilidad es necesario desarrollar tres enfoques, intuitivo, clásico y frecuencial; es decir, el enfoque intuitivo expresa en menor o mayor grado la probabilidad según la percepción del individuo.

Figura 1.

Interrelación de los enfoques de la probabilidad.



Nota: Tomado de López-Mojica y Aké (2019)

Lo anterior permitiría al individuo establecer elementos para estructurar argumentos matemáticos encaminados a razonar sobre la situación aleatoria que se esté analizando. Además, se promovería la interpretación y comprensión de procesos hacia la estructura de la matemática en relación a la situación aleatoria (López-Mojica y Aké, 2019).

Dado el espacio del documento y la pregunta de investigación, aquí se limitará sólo a emplear los tres primeros enfoques de probabilidad en la experiencia de la situación de geometría que vivieron los estudiantes en la actividad matemática propuesta y descrita en este documento. Por lo tanto, el enfoque intuitivo de la probabilidad se ha interpretado como el grado de creencia de una persona en la ocurrencia de los posibles resultados de una situación azarosa (Fischbein, 1975).

El enfoque clásico se interpreta como la razón entre el número de casos favorables con el número total de casos posibles, siempre y cuando éstos sean igualmente posibles. Se tiene que n representa el número de casos favorables del evento A, N es el número total de casos posibles, por lo tanto (Laplace,1814):

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

El enfoque frecuencial se interpreta como la estimación de la probabilidad de un evento con base en su frecuencia relativa $(\frac{n_A}{n})$ de ocurrencia en una secuencia grande de repeticiones del fenómeno aleatorio. Es decir, si un fenómeno se repite n veces bajo las mismas condiciones y nA de los resultados son favorables a ese evento A, el límite de $\frac{n_A}{n}$, conforme n se vuelve grande, tiende a la probabilidad de A (Reyes, 1997):

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_A = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

. *Procedimiento de la investigación*

La investigación es de tipo cualitativa (Vasilachis, 2006) y se desarrolla en tres fases, para el presente sólo presentamos lo correspondiente a dos de ellas, indagación y enseñanza. La primera consistió en el análisis del programa de estudios del bachillerato de la UAGro. La intención fue señalar el tratamiento de la probabilidad en la propuesta institucional. De lo anterior se identificó una ausencia para estocásticos en el programa en cuestión. A consecuencia, se decide aplicar una actividad en un contexto geométrico con la finalidad de conocer las nociones de probabilidad que surgen en los estudiantes.

La actividad de enseñanza fue tomada de Salcedo (2013), para la cual se diseñó un guión de clase para identificar las ideas fundamentales de estocásticos. Los resultados se registraron mediante la videograbación, producción en la hoja de control y material tangible. Para el análisis e interpretación de los resultados se aplicaron criterios de análisis propuestas por Ojeda (2006).

Criterios de análisis

En ese sentido Ojeda (2006**)** establece que, en el análisis de la presentación de una situación estocástica, para y en la enseñanza, conviene no sólo referirse a las ideas fundamentales de estocásticos, sino distinguirlos de los otros conceptos matemáticos que se requieren en la situación cuyo foco son los primeros (Ojeda, 2006). Además, lo anterior se complementará con los datos provenientes de los recursos semióticos con soporte gráfico (lengua natural escrita, dibujos, gráficas, diagramas, notación matemática) empleados para presentar situaciones con fenómenos aleatorios, así como el tipo de expresiones que aluden a los estocásticos. Así los criterios son:

◊ *Situación de referencia*: compete a la relación del individuo con su medio ambiente, el cual condiciona, limita, funda y determina posibilidades (Abbagnano, 1974).

◊ *Ideas fundamentales de estocásticos*: permiten tener un análisis conceptual de la situación aleatoria, por lo que son medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra (Heitele, 1975).

◊ *Otros conceptos matemáticos*: números naturales y el cero, su orden, operaciones aritméticas básicas, razón y proporción, producto cartesiano, por mencionar algunos.

◊ *Recursos semióticos*: gráficas, figuras, diagramas, notación matemática, lengua natural escrita. Ojeda (2006) argumenta que se hace referencia a “recursos semióticos” en lugar de “representaciones semióticas”, ya que esta última frase corresponde a una interiorización de los usos de esos recursos, que no es inmediata a su presentación (Ojeda, 2006).

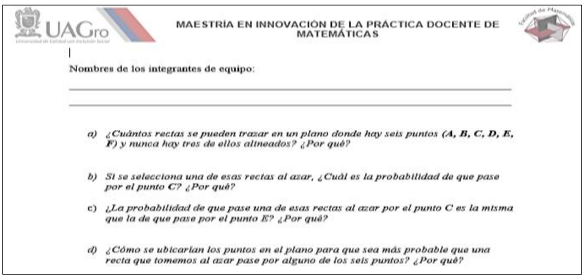
◊ *Términos empleados:* las palabras y las frases que aluden a estocásticos, ya sea técnicas o cotidianas (Ojeda, 2006, p. 210).

Situación de referencia

La actividad de enseñanza fue tomada de Salcedo (2013), la cual consiste en establecer una serie de preguntas y acciones, en el contexto de la geometría, e incidir hacia la probabilidad. Es decir, se solicitó que los estudiantes identificaran que en un plano se pueden trazar puntos de manera arbitraria, con la consigna de que en dos puntos se puede trazar una única recta, se pasó a preguntar sobre la probabilidad de elegir una al azar (ver Figura 2).

Figura 2.

Hoja de trabajo para la actividad “Rectas”.



UAGro

MAESTRÍA EN INNOVACIÓN DE LA PRÁCTICA DOCENTE DE MATEMÁTICAS

Nombres de los integrantes de equipo:

a) ¿Cuántos rectas se pueden trazar en un plano donde hay seis puntos (A, B, C, D, E, F) y nunca hay tres de ellos alineados? ¿Por qué?

b) Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que pase por el punto C? ¿Por qué?

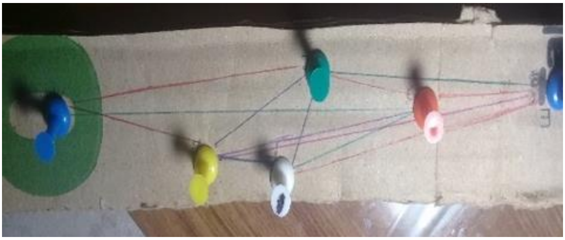
c) ¿La probabilidad de que pase una de esas rectas al azar por el punto C es la misma que la de que pase por el punto E? ¿Por qué?

d) ¿Cómo se ubicarían los puntos en el plano para que sea más probable que una recta que tomemos al azar pase por alguno de los seis puntos? ¿Por qué?

La actividad se ajustó a los enfoques intuitivo y clásico de la probabilidad, y pretendió promover nociones matemáticas previas a las formales. Se aplicó en equipos de tres integrantes y manipularon cartón y chinchetas.(ver figura 3)

Figura 3.

Material utilizado en la actividad "Rectas"



De la aplicación de los criterios de análisis a la actividad se obtiene lo siguiente: a) Situación de referencia: elección al azar de una recta con puntos asignados de manera aleatoria; b) Ideas fundamentales de estocásticos: medida de probabilidad, espacio muestra, combinatoria y adición de probabilidad; c) Otros conceptos matemáticos: recta, punto, fracción; d) Recursos semióticos: trazos de rectas, trazos de puntos, puntos coordenados; e) Términos empleados: selección, azar, probabilidad, cómo se ubicarían, más probable.

De manera específica se tiene que, *medida de probabilidad* se identifica con la relación entre el número de rectas (a elegir) que corresponden a cierto punto con el número total de rectas que se forman con los puntos dados; *espacio muestra* se identifica con el conjunto de todas las rectas que se pueden formar con los seis puntos dados; *combinación* apela al arreglo u ordenamiento de las rectas trazadas, tomadas de dos en dos; *regla de la adición* se identifica con la unión de las rectas que pasan por algunos de los puntos.

Participantes y temporalidad

La actividad de enseñanza fue aplicada a un grupo de 37 alumnos del tercer semestre (grupo 301, turno matutino) de nivel medio superior de la Escuela Preparatoria No. 2 dependiente de la Universidad Autónoma de Guerrero ubicada en la ciudad de Acapulco. Se aprovechó el espacio dado a que la primera autora se encontraba realizando una estancia académica, que corresponde a la incorporación en escenario real de enseñanza. Los estudiantes cursaban la unidad de aprendizaje Matemáticas III, la cual nos pareció indicado para aplicar la actividad ya que, haciendo uso de los elementos de geometría y estos vistos por ellos en clase, son necesarios para la actividad en cuestión.

En la unidad de aprendizaje Geometría Plana y Trigonometría ya se habían presentado los conceptos de *punto* el cual se describe como una marca que tiene posición, sin grosor, ni longitud, *recta* se refiere a una sucesión de puntos que se mueven en una misma dirección, *segmento* definido como la porción de una línea recta que está limitada por dos puntos extremos (Galindo, Ramírez, Robles, Sosa y Velázquez, 2006).

La actividad de enseñanza está contemplada para ser aplicada en una sesión con duración de 50 minutos, para la realización de esta actividad se conformaron en equipos, los cuales de acuerdo a la cantidad de alumnos quedaron de la siguiente manera, 10 equipos de tres integrantes cada uno y un equipo de dos integrantes y material concreto en una sesión de 50 minutos dando un total de 11 equipos. A cada estudiante se le hizo entrega de una hoja de control y material tangible, es de mencionar que la actividad fue videograbada para recoger los datos para su correspondiente transcripción y permitir el análisis de este y hojas de control para los estudiantes.

Primeros resultados

A la producción de los estudiantes se les aplicó los cinco criterios de análisis (Ojeda, 2006). Por lo que, respecto a las ideas fundamentales identificamos espacio muestra con el señalamiento de todos los pares ordenados de los puntos dados, medida de probabilidad cuando establecieron la relación entre las rectas que pasaban por cierto punto y el total de rectas encontradas y combinatoria con los pares ordenados de los puntos dados.

Las respuestas de los estudiantes estaban acompañadas de registros semióticos para complementar sus argumentos, estos fueron: pares ordenados de los segmentos, trazo de puntos y la unión en rectas; lengua natural al expresar la cantidad de rectas formadas, elegidas al azar basado en sus resultados obtenidos de cada uno de los equipos. También se pudieron identificar señas relativas al registro de pares ordenados, en el cual un equipo empleó la forma de representar el espacio muestra con el símbolo {}. También se pudo identificar que los estudiantes mostraron otros conceptos matemáticos, como punto, recta y segmento, para estos dos últimos señalaron la diferencia entre ellos y cómo se forma. Respecto a los términos empleados, se puede precisar el uso de expresiones como alineados, equidistar, "5 de 15" (relación), plano cartesiano, unión, intersección. Estos términos forman parte tanto de contenido geométrico como probabilístico.

Ideas fundamentales de estocásticos

Como ya se adelantó en los elementos teóricos, las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele,1975) son nuestra base para tener información del acercamiento que tienen los estudiantes con el pensamiento probabilístico. En este caso, también permiten identificar las nociones de estos conceptos matemáticos por medio del uso del enfoque clásico de la probabilidad.

La idea fundamental de **medida de probabilidad** se pudo señalar en uno de los 11 equipos. Por ejemplo, los estudiantes del equipo número 10 al cabo de la realización de la actividad, cuando se les planteó la pregunta que se encuentra en la transcripción, identificaron la razón entre el número total de rectas con las que pasan por un punto dado. En los siguientes episodios, I corresponde al investigador, $E_{1, 2, 3, \ldots}$, corresponde a los estudiantes.

I: ¿Si elegimos al azar una recta, cuál es la probabilidad de que pase por el punto C?

E_{10}: ¡5 de 15!

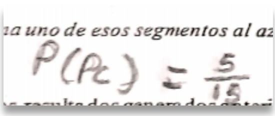
Los demás equipos expresaron otras respuestas, como ejemplo comentaron con cantidad (número), más no la relación de esas rectas con el punto que se planteó; esto debido al alcance que tuvieron al hacer el trazo de rectas y al registro de éstas.

I: ¿Si elegimos al azar una recta, cuál es la probabilidad de que pase por el punto C?
E_2: ¡12!

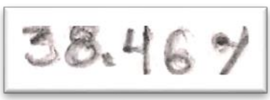
Algo que se identificó en varias respuestas de los estudiantes fue la forma en cómo escribían la probabilidad; por ejemplo, el equipo número 8 se refieren en porcentaje, el equipo número 5 se refieren a manera de razón y otros tantos en decimal (ver Figura 4).

Figura 4.

Maneras de expresión de la probabilidad



a. Respuesta del equipo 5



b. Respuesta del equipo #8

En la tabla 3 se presenta el listado de las respuestas dadas por cada uno de los equipos con respecto a la idea fundamental de medida de probabilidad.

Tabla 3.

Expresiones de medida de probabilidad

Pregunta: Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que pase [la recta] por el punto C?	
No. Equipo	Respuesta
#1	---
#2	$\frac{5}{12}$
#3	---
#4	4
#5	P(PC)=$\frac{5}{15}$
#6	3
#7	Porque es uno de los segmentos de los puntos intermedios
#8	38.46%
#9	5, porque al multiplicar por los mismos donde aparece este mismo da como resultado 15
#10	Es de una probabilidad de 45%
#11	3

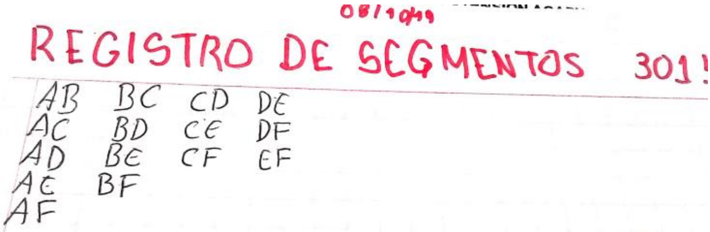
Respecto a **espacio muestra**, al cabo de la petición de ubicar de manera arbitraria seis puntos dados y con ellos trazar rectas donde sólo estuvieran dos puntos de ellos. Algunas de las producciones de los estudiantes sugieren el uso de esta idea fundamental con el registro de sus trazos; además, con el listado de los segmentos de rectas. Algunas de las producciones fueron segmentos de rectas, listados de puntos en dos y tablas de registro.

Con la pregunta "¿Cuántas rectas se pueden trazar en un plano donde hay seis puntos/pines (**A, B, C, D, E, F**) y nunca hay tres de ellos alineados? ¿Por qué?" se pretendía señalar las nociones del espacio muestra, sin embargo, causó dificultades para construir el espacio muestra, una de ellas fue el espacio físico donde hicieron sus trazos que no les permitió visualizar el número de rectas formadas.

Para la idea de **combinatoria** lo que se logró es la cantidad de rectas que formaron con los puntos dados, es decir obtuvieron el resultado sumando el número de las rectas antes mencionadas. Una limitante fue el tiempo en que se desarrolló la actividad de enseñanza. Por lo tanto, sólo se enfocaron en hacerlo de forma gráfica, es decir, mediante los trazos de las rectas y los registros de estas. El registro de los trazos lo hicieron mediante la formación de las letras asignadas a cada punto, representado así a la idea de combinatoria. (ver figura 5)

Figura 5.

Pares ordenados

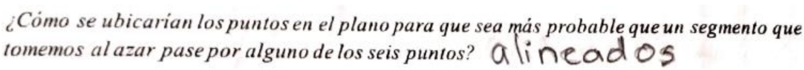


Con respecto a la idea de la **regla de la adición**, la pregunta asociada fue ¿Cómo se ubicarían los puntos en el plano para que sea más probable que una recta que tomemos al azar pase por algunos de los seis puntos?, no se logró la expresión matemática de la idea en cuestión, algunos equipos respondieron de acuerdo a su intuición y/o con términos matemáticos de geometría (ver en la figura 6).

En la figura 6 el equipo 8 responde usando término matemático de geometría sin llegar a la expresión matemática que corresponde a la idea fundamental de la regla de adición.

Figura 6.

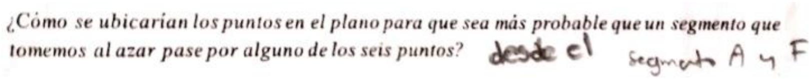
Respuesta del equipo 8.


¿Cómo se ubicarían los puntos en el plano para que sea más probable que un segmento que tomemos al azar pase por alguno de los seis puntos? alineados

La **respuesta** dada por el equipo 7 **respondió** con el sentido de expresar que, desde el primer punto hasta el último, es decir una sola recta, muy similar a la respuesta del equipo 8.

Figura 7.

Respuesta del equipo 7


¿Cómo se ubicarían los puntos en el plano para que sea más probable que un segmento que tomemos al azar pase por alguno de los seis puntos? desde el Segmento A y F

Otros conceptos matemáticos

En correspondencia a lo establecido por Ojeda (2006), analizar la producción de los estudiantes sobre otros conceptos matemáticos, es indispensable en el desarrollo del pensamiento probabilístico.

De acuerdo con las producciones obtenidas, se identificaron conceptos de geometría: punto, recta, segmento. Es importante que toda actividad diseñada para la comprensión del pensamiento probabilístico debe contener elementos de otras áreas de las matemáticas porque son el complemento para asegurar el conocimiento estocástico. A continuación, se presentan líneas de texto de la transcripción de la videograbación donde se identifican otros conceptos matemáticos.

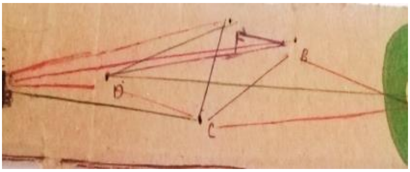
Recursos semióticos

En este criterio como parte para la organización y tratamientos de los datos que serán utilizados en sus respuestas de las preguntas planteadas en la actividad de enseñanza se hizo uso del material tangible

Se puede destacar el trazo de puntos en el pedazo de cartón, así como la unión de rectas y poder obtener el registro de los pares ordenados para espacio muestra, algunos equipos utilizaron pares ordenados, tablas, trazos de segmentos para lo antes mencionado. Como parte del recurso semiótico fue el trazado de las rectas trozo de cartón, chinchetas, regla, colores, lápices. (ver figura 8)

Figura 8.

Trazo de rectas



Otra forma que hicieron los estudiantes para registrar y ordenar las rectas fue mediante el uso de una tabla. Es de importancia que los estudiantes tengan la habilidad de hacer sus registros, para este caso particular enumeraron el número de la recta trazada de acuerdo a los puntos dados de forma escalonada. (ver figura 9)

Figura 9.

Tabla de registros

Términos empleados

Durante la aplicación de la actividad de enseñanza, los equipos utilizaron términos de geometría y de probabilidad, por mencionar algunos: *alineados*, lo cual refiere la colocación de la recta entre los dos puntos, *equidistar* se alude a la colocación de dos puntos a una distancia, *plano cartesiano* se refiere al espacio (trozo de cartón) en que realizaron los trazos de las rectas; *unión* es el conjunto de rectas formadas, *5 de 15*, este término de contenido probabilístico se refiere a la razón de rectas elegidas al azar por el número total de rectas formadas con los seis puntos.

Los términos que emplearon los estudiantes son parte de la enseñanza para el proceso del pensamiento probabilístico y del contenido geométrico, por lo tanto, se puede comprender que existe un acercamiento de las nociones de probabilidad.

Conclusiones

Lo interesante de los resultados generados es que el grupo de estudiantes que desarrollaron la actividad evidencian haber comprendido el contenido matemático tanto de geometría plana y de los elementos teóricos propuestos en este documento. Esto se identificó mediante los criterios de análisis permitiendo conocer que algunos equipos tienen nociones de probabilidad vistos en niveles educativos anteriores.

Se pudo observar que el pensamiento probabilístico hace uso de otros contenidos matemáticos, de recursos semióticos, de las ideas fundamentales de estocásticos, que permitirán arribar al razonamiento probabilístico y dar valor representativo a la información.

De acuerdo con la pregunta planteada en este documento, que los estudiantes de bachillerato de tercer semestre tienen nociones de probabilidad sin cursar aún la unidad de aprendizaje referente a estocásticos, se entiende que estas nociones han estado presentes por los niveles educativos anteriores.

Las nociones de probabilidad que se identificaron fueron los pares ordenados que ayudaron para el espacio muestra, la combinación mediante el conteo de los pares ordenados, la medida de probabilidad, que este caso fue el enfoque clásico, expresando la forma de razón mediante el número de rectas trazadas. Estas nociones son parte de las ideas fundamentales de estocásticos. Por lo tanto, se reflexiona que es posible promover el pensamiento probabilístico en distintas situaciones.

Es de suma importancia que el sistema educativo nacional retome los contenidos de la probabilidad, sean valorados como forma de pensamiento y toma de decisiones, que no solo se vea como un conjunto de reglas y fórmulas.

Referencias bibliográficas

Abbagnano, N. (1974). *Diccionario de filosofía* (1a. ed.). México: Fondo de Cultura Económica.

Batanero, C., Henry, M. & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones, *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York. Springer,

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* USA: Holland: Reidel.

Galindo, T. H., Robles , S. J., Velázquez, O. A., Ramírez, M. M., Arias, T. R., Robles, M. B., & Sosa, d. P. (2006). *Geometría y Trigonometría Matemáticas.* Zapopan, Jalisco, México: Umbral.

Heitele, D. (1975). *An epistemological view on fundamental stochastic ideas.* Educational Studies in Mathematics. doi:: https://doi.org/10.1007/BF00302543

Laplace de, P. S. (1812; 1820). *Théorie analytique des probabilités* (3ª edición). Francia: Courcier.

López Mojica, J., & Aké. (2019). Argumentos Intuitivos De Futuros Profesores: Una Experiencia Con Probabilidad, *REVEMAT* 14, 1-18. http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e61978

López-Mojica, J., Ojeda, A., & Salcedo, J. (2018). Ideas fundamentales de estocásticos en libros de texto de educación primaria: una alternativa de enseñanza. *IE Revista de Investigación Educativa de la rediech 9*(17), 87-102.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.). *Matemática Educativa,* *treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (195-214). México: Santillana

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l´idée de Hasard Chez l´enfant*. Francia: PUF.

Reyes Carreto, R. (1997). *Introducción a la teoría de probabilidades.* Chilpancingo, Guerrero, México: Gráfica del Sur.

Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D. y Vásquez-Ortiz, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios pedagógicos, 44*(1), 135-156.

Salcedo, P. J. (2013). *Razonamiento probabílistico en el bachillerato tecnológico.* Ciudad de México, México.

Sánchez, E. (2000), "Investigaciones didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad", Recherches en Didactique des Mathématiques, 20(3), 305-330

UAGro. (2010). *http://www.cgru.uagro.mx.* Obtenido de http://www.cgru.uagro.mx/plan_estudio_2010/PECEMS2010.pdf

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* Barcelona : Gedisa.

Modelación-covariación en la caracterización de las funciones polinómicas. Exploración para la función de primer grado[9]

Karen Zúñiga González - María Esther Magali Méndez

karenzg04@gmail.com

Este es un reporte de un proyecto de investigación en proceso, el cual versa sobre la significación de las funciones polinómicas (primer, segundo y tercer grado) mediante la modelación y los niveles de razonamiento covariacional. Se ha elaborado un experimento de enseñanza que consta de tres diseños de actividades matemáticas basadas en la categoría Socioepistemológica de modelación escolar, la cual promueve el análisis del desarrollo de niveles de razonamiento covariacional en estudiantes de nivel medio superior. Se reportan los alcances de una de las actividades matemáticas, sobre función de primer grado, y se identificó que se alcanzó únicamente el nivel I, esto debido a que la actividad no pudo desarrollarse completamente.

Palabras Clave: Modelación escolar, razonamiento covariacional, funciones polinómicas, experimento de enseñanza.

Introducción

Estudios realizados en muchos países indican que los problemas con el aprendizaje de las matemáticas no son de orden local o regional, sino de orden mundial (Tall, 1992; Artigue, 2000; García, 2013). Las matemáticas se enseñan de manera masiva, descontextualizada y

[9] Zúñiga, K. y Méndez, M, (2020). Modelación-covariación en la caracterización de las funciones polinómicas: Exploración para la función de primer grado. En M. Méndez, M. Ferrari & N. Marquina (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 1* (pp. 137-156). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México.

algoritmizada, lo que convierte su aprendizaje en un proceso formal, ligado a una serie de reglas, axiomas, postulados y teoremas, constituyendo estos aspectos un fin en sí mismo lejos de la realidad cotidiana, incluso en muchos casos tal aprendizaje se reduce a un nivel que roza con la aritmética gracias al uso de calculadoras, donde lo único que se vuelve importante es la obtención, ojalá correcta, de las respuestas a los ejercicios presentes en algún texto o propuestos por el docente (García, 2013; Salinas y Alanís, 2009).

Esta descontextualización y desarticulación de la enseñanza de las matemáticas ha ido afectando a sus diversas áreas de estudio, el área que interesa en esta investigación es el Cálculo, mismo que su enseñanza y aprendizaje tiende a presentar un alto nivel de desarticulación con el contexto epistemológico o social, lo que ha obligado al educando a realizar la titánica labor de ser él quien procure integrar los distintos saberes aprendidos como un todo, aspecto que evidentemente no es fácil de lograr.

Respecto a su enseñanza, investigaciones realizadas por Moreno y Ríos (2006) destacan dos visiones sobre la enseñanza del Cálculo: la *visión tradicional* y la *visión moderna*. La primera visión se enmarca una concepción clásica de la enseñanza, donde el énfasis se coloca en la memorización de técnicas y reglas que no tienen vinculación con la realidad y dan la impresión de que la matemática sólo existe en el momento de la clase.

La segunda visión, llama la atención a que se debe hablar del aprendizaje como construcción de significados para que el estudiante construya el conocimiento de acuerdo a su contexto y en las orientaciones provenientes del profesor que no debe ser visto como un transmisor de saberes, sino como el otro participante del proceso de aprendizaje que junto al alumno construye el conocimiento, lo cual significa que su actividad se dirige a promover la organización, interpretación y comprensión del material informativo para que sea el mismo estudiante el que decida el qué y el cómo de lo que aprende.

El interés, se ha puesto en esta segunda visión de la enseñanza del cálculo, en donde se busca proponer situaciones de aprendizaje para la matemática escolar en donde se signifiquen saberes matemáticos, en específico sobre funciones.

Problemas como este han sido tema de estudio tanto cuantitativamente como cualitativamente de manera muy detallada en las últimas décadas, pero es evidente que aún se está lejos de poder resolverlos, lo que propició la generación de una nueva disciplina del conocimiento denominada "Matemática Educativa", la cual va más allá de ser un simple cruce entre la pedagogía y las matemáticas (García, 2013).

A partir de esta disciplina, las investigaciones desarrolladas parten de la expectativa que es posible enfrentar los problemas del aprendizaje de las matemáticas si se toma en cuenta que dicho aprendizaje está afectado por múltiples variables. Estas son tanto de orden psicológico (que incluye aspectos cognitivos y emocionales), como epistemológicos (que se debate sobre lo que es hacer matemática), curriculares (qué es lo que se debe aprender y cuándo) y didácticos (cómo se deben enseñar y para qué) (Cordero, 2005).

Ante esto, se han creado teorías y metodologías que tratan con los problemas del aprendizaje que nos ocupa. Dentro de estas teorías, reconocemos los aportes hacia el Cálculo en la línea de investigación de la covariación y del razonamiento covariacional, el primero es la relación de dos cantidades que varían simultáneamente y el segundo es una herramienta para saber el nivel del entendimiento de la covariación, en tanto que ambos permiten la comprensión de la noción de función (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Confrey y Smith, 1995; Ferrari, Martínez y Méndez, 2016). Y de la línea de la modelación, en particular la categoría de modelación escolar (Méndez y Cordero, 2012; Méndez 2013) basada en principios teóricos Socioepistemológicos, en tanto permite el estudio del comportamiento de situaciones de variación a través de prácticas de modelación (Observar, tomar decisiones, interpretar, organizar, especular, calcular, ajustar, postular, adaptar y consensuar, entre otras).

Partiendo de este antecedente, nuestra hipótesis es que las prácticas de modelación orientan el desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional, y para dar evidencia de ello se hace una propuesta de experimento de enseñanza, teniendo como objetivo la significación de las funciones polinómicas (primer, segundo y tercer grado) mediante la modelación y los niveles de razonamiento covariación.

Este reporte muestra una exploración de la primera actividad matemática que tiene como objetivo particular significar a la función de primer grado a partir de una situación de llenado de recipientes cilíndricos, este ha permitió reflexionar sobre cómo mediante la modelación del llenado de recipientes se comprende la covariación de dos variables y en qué niveles de razonamiento covariacional se alcanzan.

En términos generales consideramos a la propuesta, que incluye la modelación y la covariación para significar a la función de primer grado, una innovación sobre la forma de desarrollar este tema en la matemática escolar.

Marco conceptual

Los elementos teóricos que se sostiene esta investigación devienen de la categoría de modelación escolar (Méndez, 2013, Méndez y Cordero, 2014) y de las investigaciones sobre la covariación y los niveles de desarrollo del pensamiento covariacional (Ferrari, Martínez & Méndez, 2016; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002) , mismos que se desarrollan independiente en la disciplina, este escrito muestra la primera vinculación entre constructos teóricos, y se plantea la hipótesis sobre esta unión, la modelación promueve los niveles de razonamiento covariacional.

La categoría de modelación escolar

En esta investigación se adopta a la modelación desde el seno de la teoría Socioepistemológica, la cual reconoce que las construcciones de conocimiento, son una producción social que cambia y transforma la naturaleza y la sociedad; que los conocimientos tienen un origen y una función social asociada a un conjunto de prácticas, de modo que existe una relación entre la naturaleza del conocimiento y las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos (Cantoral, 2013). Por lo que se acepta a las prácticas sociales como la base de conocimiento, en la medida en que son el sustento y la orientación para llevar a cabo una construcción social del conocimiento matemático.

Se estudian las prácticas sociales (PS) y su funcionamiento en la construcción del conocimiento matemático, esto para elaborar categorías de conocimiento que promuevan, en el discurso matemático escolar, una matemática funcional evidenciada en el desarrollo de usos del conocimiento matemático ante situaciones específicas. En la teoría se concibe a la modelación en tres planos, la primera como una de estas PS, a la cual el saber matemático debe su origen, su razón de ser y su significado; en un segundo plano se plantea como categoría de conocimientos matemático en tanto es un puente entre lo teórico y aquello que puede vincularse con el discurso matemático escolar y finalmente como una eje para la elaboración de actividades matemáticas, en las cuales se hace explícito cómo promover la construcción del conocimientos matemáticos (Méndez y Cordero, 2014).

En nuestra categoría de modelación escolar (Méndez y Cordero, 2014; Méndez, 2013; Méndez y Cordero, 2012), la experimentación, es esencial pues permite vivenciar y examinar una situación concreta, por ejemplo el caso del llenado de los recipientes, esto puede ser una simulación, evocación o situación real lo que provoca acciones concretas para describir, entender y comunicar lo que sucede, para esto se recopilan datos (numéricos o gráficos) y se generan procedimientos que producen herramientas de variación para la predicción, optimización, unión y/o análisis de la experimentación. Esto provoca la resignificación de usos de conocimientos matemáticos (Cordero, 2001) en tanto se construyen significados para los saberes matemáticos.

Desde esta visión, no existe modelación sin experimentación, y es el proceso de tratamiento de los datos como herramientas que está ejerciendo la modelación, y el fenómeno se convierte en lo modelado y los datos en el modelo (Arrieta y Díaz, 2015).

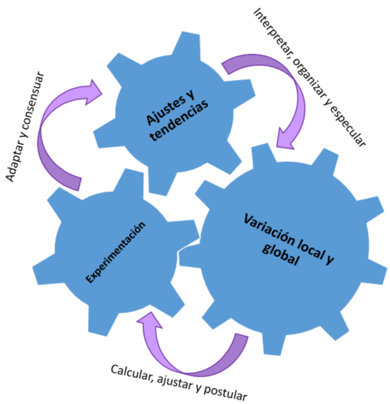
La categoría de modelación escolar funciona como el eje de argumento que organiza patrones de comportamiento involucrando las condiciones o criterios de una situación específica, favoreciendo la constitución de ciertos conocimientos matemáticos. Es decir, los diseños de actividades matemáticas siguen una estructura en tanto el tipo de preguntas que promueve una forma de proceder. Se espera que los partícipes puedan construir y desarrollar su conocimiento matemático en las actividades.

Las actividades provocan el desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos (drucm), en la caracterización de comportamientos de tipos de variación. El núcleo o corazón de este drucm (figura 1), es lo que hace que emerjan los usos de gráficas-tablas-expresiones analíticas como herramientas que permiten estudiar, explicar y conjeturar sobre la variación local o global, para describir tendencia o caracterizar un comportamiento. Estos usos de conocimiento matemático pueden ubicar las producciones de los estudiantes en niveles específicos de covariación.

En los diseños los usos aparecen como argumentos que los actores emplean para organizar comportamientos y variaciones mediante la comparación de dos estados, los cambios de condiciones en la experimentación y sus implicaciones en las variaciones en una gráfica o datos numéricos hasta llegar al estudio de operaciones de corte lógico-formal. Estas construcciones son enlazadas por prácticas, que llamaremos prácticas de modelación, como interpretar, analizar, especular, graficar, calcular, organizar, postular, adaptar y consensuar, entre otras, que son el puente entre una herramienta y otras y lo modelado.

Figura 1:

El núcleo de la categoría de modelación



Nota: Tomado de Méndez (2013, p.61)

Covariación y razonamiento covariacional

La covariación se concibe como un constructo usado para estudiar cómo se relacionan dos variables que cambian simultáneamente (Saldanha y Thompson 1998), pensar en la covariación como la coordinación de secuencias encaja bien con el empleo de tablas para presentar estados sucesivos de una variación o bien para describir cómo va cambiando una variable cuando la otra cambia.

Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002) definen el razonamiento covariacional "como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables mientras que atiende a las maneras en que cambia una variable respecto a la otra" (p.354) y es utilizado para analizar, interpretar y representar el comportamiento de funciones que modelan fenómenos dinámicos que involucran estas dos variables. Mientras que los niveles de razonamiento covariacional describen el desarrollo que se alcanza por los estudiantes, en términos de acciones mentales involucradas al interpretar y representar eventos de función dinámica (Ferrari, Martínez & Méndez, 2016; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002).

Se consideran cinco acciones mentales de razonamiento covariacional las cuales tienen comportamientos asociados, estas acciones no visibles que los individuos aplican a objetos materiales o inmateriales son accesibles a terceros a través del medio simbólico. A un estudiante se le da una clasificación de nivel de acuerdo con la imagen general que aparece para apoyar las diversas acciones mentales que exhibió en el contexto de un problema o tarea. Estos niveles emergen en una secuencia ordenada y se dice que se ha alcanzado un nivel de desarrollo cuando se apoyan las acciones mentales asociadas con ese nivel y las acciones asociadas con todos los niveles anteriores (véase tabla 1) (Carlson, et al. 2002).

Tabla 1

Niveles de razonamiento covariacional

<table>
<tr><td>Acción Mental 1 (MA1): Coordinar el valor de una variable con cambios en la otra.</td><td>Nivel 1 (L1). Coordinación</td><td rowspan="2">Nivel 2 (L2). Dirección</td><td rowspan="3">Nivel 3 (L3). Coordinación cuantitativa</td><td rowspan="4">Nivel 4 (L4). Tasa promedio</td><td rowspan="5">Nivel 5 (L5). Tasa Instantánea</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción Mental 2 (MA2): Coordinar la dirección de cambio de una variable con cambios en la otra variable.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Acción Mental 3 (MA3): Coordinar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Acción Mental 4 (MA4): La coordinación de la tasa media de cambio de la función con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Acción Mental 5 (MA5): Coordinando la tasa instantánea de cambio de la función con cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.</td></tr>
</table>

Nota: Tomado de Ferrari, Martínez y Méndez, 2016

2.3. Articulación de los niveles de razonamiento covariacional y las prácticas de modelación

Interesa hacer explícito cómo la modelación promueve los niveles de razonamiento covariacional. Por esta razón nos interesa reflexionar sobre la vinculación de los niveles del razonamiento covariacional con la categoría de modelación escolar, la primera impresión es que esto es mediante las prácticas de modelación y los usos de conocimiento matemático.

La tabla 2, muestra una articulación que nos permitirá analizar e interpretar el comportamiento de situaciones de variación que involucran dos cantidades simultáneamente cambiantes a partir de las prácticas de modelación puestas en juego. En cada uno de los niveles se describen las prácticas de modelación que guían su desarrollo, y las acciones mentales correspondientes a cada uno de los niveles.

Tabla 2

Prácticas de modelación para promover el razonamiento covariacional

<table>
<tr><td>Acción mental</td><td colspan="5">Articulación de los niveles de razonamiento covariacional y prácticas de modelación</td></tr>
<tr><td>Acción Mental 1: Coordinar el valor de una variable con cambios en la otra.</td><td>Nivel 1. Coordinación Prácticas: Observar, interpretar y organizar las variables y condiciones de experimentación.</td><td rowspan="2">Nivel 2. Dirección Prácticas: Seleccionar y especular, sobre las variables que intervienen en la situación, la relación entre ellas para percibir qué y cómo varía.</td><td rowspan="3">Nivel. 3 Coordinación cuantitativa. Prácticas: Analizar, comparar y postular para estudiar la variación local, comparando intervalos de cambio identificando cuánto cambia la variable de salida si la de entrada sufre un cambio.</td><td rowspan="4">Nivel 4. Tasa promedio. Prácticas: Ajustar y calcular, las variaciones globales en términos del comportamiento y el cálculo aproximado de la variación constante en la razón de cambio de las variables.</td><td rowspan="5">Nivel 5. Tasa Instantánea. Prácticas: Predecir y anticipar el comportamiento general e instantáneo mediante la conjunción de los parámetros y variables que intervienen en la situación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción Mental 2: Coordinar la dirección de cambio de una variable con cambios en la otra variable.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Acción Mental 3: Coordinar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Acción Mental 4: La coordinación de la tasa media de cambio de la función con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Acción Mental 5: Coordinando la tasa instantánea de cambio de la función con cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.</td></tr>
</table>

Esta tabla surgió como producto del grupo de estudio entre la profesora del núcleo académico básico de la maestría, la Dra. María Esther Magali Méndez Guevara, y sus estudiantes de posgrado: la Lic. J. Alicia Rojas y la Lic. Karen Zúñiga. Grupo en el que se ha tomado cierta atención al desarrollo de estos dos constructos y su implicación en actividades que promuevan la innovación de la práctica docente.

Metodología

Para el desarrollo del proyecto se ha utilizado la metodología de la investigación de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), la cual tiene como objetivo analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación.

En esta metodología, en cuanto al papel de los docentes e investigadores, en este caso los investigadores son agentes externos que realizan una inmersión en un contexto de aprendizaje-enseñanza; la participación de los docentes es opcional, pudiendo ser nula, y son los investigadores los que toman la iniciativa en el proceso de investigación (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Los experimentos de enseñanza, que se enmarcan dentro de esta metodología, es el método que se ha utilizado para el desarrollo de este proyecto. Se caracterizan por ser la ruptura entre docente e investigador, y consisten en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores. La duración y la átmosfera dependerá de lo que esté investigando.

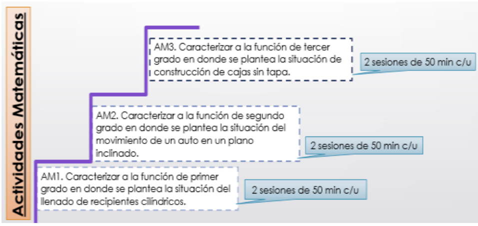
En la ejecución de los experimentos de enseñanza, se distinguen tres fases: 1) Preparación del experimento; 2) Experimentación para promover el aprendizaje, aquí se tiene lugar a las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones del ciclo de tres pasos: diseño y formulación de hipótesis, intervención en el aula y recogida de datos, y análisis de los datos, revisión y reformulación de hipótesis; 3) Ejecución del análisis retrospectivo de los datos (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). A continuación, se muestran las fases desarrolladas hasta este momento:

Fase 1. Para esta fase se han diseñado tres actividades matemáticas (AM) (figura 2), mismos que están basados en la categoría de modelación. Cada una de las AM tiene un objetivo particular, y es el caracterizar cada una de las funciones polinómicas a saber.

Fase 2. Para cada una de las AM se ha elaborado un diseño instruccional donde se describen las trayectorias hipotéticas de aprendizaje a la par de las prácticas de modelación que promueven los niveles de razonamiento covariacional.

Figura 2:

Fase 1. Preparación del experimento de enseñanza



Hasta ahora se ha realizado una primera exploración en el contexto escolar con estudiantes de nivel medio superior, y es lo que se reporta.

Participantes y contexto

Esta primera exploración en el contexto escolar fue con estudiantes de nivel medio superior, nivel para el cual se ha elaborado el experimento de enseñanza. Se trabajó con un grupo de 36 estudiantes que se les solicitó se conformaran en 7 equipos, cuatro de 5 integrantes y uno de 6 integrantes.

Tareas

Uno de los elementos claves de la fase de preparación, después de definir el problema y el objetivo de la investigación, es definir la secuencia de intervenciones y su temporalidad además de delinear la trayectoria hipotética de aprendizajes (THA) esperados, en este caso tienen que ver con los niveles del razonamiento covariacional que se plantearon, esto se explicita a continuación.

En esta primera exploración solo se dio la oportunidad de implementar una de las dos sesiones planteadas para la primera AM, por lo que únicamente se describe el diseño instruccional elaborado para la actividad de esta primera sesión de 50 minutos (ver Tabla 3).

Tabla 3

Diseño instruccional de la sesión 1 del primer diseño

Diseño 1. Comunicado el llenado de recipientes Sesión 1- Tarea 1			
Objetivo particular: Qué los estudiantes, a partir de relacionar dos variables (tiempo-altura, tiempo-volumen, altura-volumen) que cambian simultáneamente, y mediante el uso de la tabla de datos, la gráfica y expresión analítica, caractericen a la función polinómica de primer grado. **Prácticas de modelación :** Observar, interpretar y organizar **Nivel de RC:** Nivel 1. Coordinación			
Pregunta	**Objetivo**	**THA**	**Preguntas guía**
1.En la siguiente actividad, en equipo observen el llenado del recipiente que se asignó y comunica sin palabras (escritas o pronunciadas) y sin mímica, cómo se llenó el recipiente y respondan las siguientes preguntas.	Observe e identifique las variables que influyen en el llenado del recipiente y que el flujo es constante.	Reflexionar que el llenado es constante y realicen un instrumento que les permita comunicar el llenado de recipientes con las condiciones dadas.	¿Cómo comunican el llenado de acuerdo a las condiciones dadas? ¿Por qué al dispensador se le vierte agua cuando está abierto? ¿Por qué es necesario esto? De acuerdo con esto, ¿cómo es el llenado?

Tabla 3 a

Diseño instruccional de la sesión 1 del primer diseño: Sesión 1 – Tarea 1

			Sesión 1 - Tarea 1
Pregunta	**Objetivo**	**THA**	**Preguntas guía**
a) ¿Qué elementos influyen en el llena-do del re-cipiente?	Identifique que dentro de las variables que influyen, como, gravedad, el chorro de agua, el recipiente cilíndrico, el dispensador de agua, la distancia del chorro, etc., están las variables tiempo de llenado, altura de recipiente cilíndrico y volumen del recipiente cilíndrico.	Convengan que las variables que permiten comunicar el llenado son: tiempo, altura y volumen.	¿Qué es lo que observaron? ¿Qué forma tiene el recipiente que se está llenado? ¿Cómo se llenó el recipiente?
b) ¿Cómo relacionan los ele-mentos que influ-yen?	De las variables convenidas, relacionen tiempo-altura, tiempo-volumen o volumen-altura.	Describan el comportamiento del experimento de acuerdo con las variables. La altura que va tomando el agua en determinado tiempo; el volumen que va tomando el agua en determinado tiempo; la altura que va tomando el agua a cierta cantidad de volumen.	Elijan dos de los elementos o variables. ¿Cómo describen el llenado de acuerdo con los elementos elegidos?
c) ¿Cómo expresa-rían esa relación?	Relacione los elementos que convenga en una repre-sentación icónica, una gráfica, una tabla o una expresión.	Construyan una gráfica, una tabla, una expresión o un dibujo en donde comuniquen el llenado.	¿Hay alguna herramienta matemática que nos permita rela-cionar esos elementos?

Tabla 3 b

Diseño instruccional de la sesión 1 del primer diseño: Sesión 1 – Tarea 2

			Sesión 1 – Tarea 2
Prácticas de modelación: Seleccionar y especular, sobre las variables que intervienen en la situación, la relación entre ellas para percibir qué y cómo varía. **Nivel de RC:** Nivel 2. Dirección			
Pregunta	**Objetivo**	**THA**	**Preguntas guía**
2. Intercambien entre equipos sus instrumentos de comunicación del llenado, interpreten lo que sus compañeros hicieron y compartan en grupo lo que entienden. Describan brevemente a lo que llegaron.	Concluyan que los elementos que convienen utilizar son tiempo, altura y volumen, y que estos se relacionan en representaciones icónicas, gráficas, tablas o expresiones.	Compartan, analicen e interpreten sus instrumentos de comunicación.	¿Qué es lo común en sus interpretaciones? ¿Qué nos dice la relación tiempo-altura? ¿Qué nos dice la relación tiempo-volumen? ¿Qué nos dice la relación altura-volumen?

Tabla 3 c

Diseño instruccional de la sesión 1 del primer diseño: Sesión 1 – Tarea 3

			Sesión 1 – Tarea 3
Prácticas de modelación: Analizar, comparar y postular para estudiar la variación local, comparando intervalos de cambio identificando cuánto cambia la variable de salida si la de entrada sufre un cambio **Nivel de RC** : Nivel 3. Coordinación cuantitativa			
Pregunta	**Objetivo**	**THA**	**Preguntas guía**
3. En equipo, tomen datos sobre el llenado del recipiente asignado, consideren un par de variables y respondan las siguientes preguntas.	Elijan un par de variables y hagan toma de datos.	Construyan una tabla de datos de acuerdo con las variables que consideraron.	
a) ¿Qué variables consideraron?	Elija un par de variables: Tiempo-altura Tiempo-volumen Altura-volumen	Tiempo-altura Tiempo-volumen Altura-volumen	
b) De las variables elegidas, ¿Cómo y cuánto varía el llenado del recipiente?	Identifique que la variación es constante y que cada cierto tiempo se llena lo mismo.	Realice una comparación entre los datos que tienen, e identifiquen que, por ejemplo: cada 5 segundo la altura aumenta 2.3cm	¿qué pasa entre los segundos 5 y 10? ¿Cuál es la diferencia entre las alturas?

Tabla 3 d

Diseño instruccional de la sesión 1 del primer diseño: Sesión 1 – Tarea 3

Sesión 1 – Tarea 3			
Prácticas de modelación: Ajustar y calcular, las variaciones globales en términos del comportamiento y el cálculo aproximado de la variación constante en la razón de cambio de las variables **Nivel de RC** : Nivel 4. Tasa promedio			
Pregunta	**Objetivo**	**THA**	**Preguntas guía**
c) ¿Qué altura tendrá el agua en el recipiente después de 4 segundos, 19 segundos y 35 segundos?	Encuentre la razón de cambio.	Encuentre la razón de cambio al dividir el incremento de las alturas entre el tiempo, eso indica la cantidad de agua que cae en el recipiente por cada segundo. Y el resultado multiplicarlo por los segundos que se quieren saber.	¿Qué quieren decir con esa división? ¿Qué encuentran al hacer esa operación? ¿Por qué encontrar la altura en cada segundo? ¿para qué sirve?
d) Formulen una expresión o método que permita decir que altura tendrá el agua en el recipiente en cualquier tiempo.	Formulen la expresión $f(x) = ax$ Donde x es el tiempo en segundos que se quieren saber. Y $a = \frac{(cm)}{(seg)}$ la razón de cambio	$\frac{(cm)}{(seg)}(x)$ $= la\ altura\ en\ el\ tiempo\ x$	¿Por qué por x?

Recolección de datos y su análisis

Para la recolección de los datos se hizo uso de dos técnicas: videograbación y hojas de control. En esta primera exploración se auxilió de una compañera de la maestría como camarógrafa, misma que se encargó de video grabar, por momentos, a los equipos conformados y los momentos de plenarias. Las hojas de control son donde iban impresas las actividades a realizar por los estudiantes, estas se entregaron por equipo al inicio de la sesión y se recogieron al finalizar.

Para el análisis de los datos se auxilia del diseño instruccional con el cual se analizan las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes y las prácticas de modelación que surgen al tratar con la situación a la par que de identifican los niveles de razonamiento covariacional alcanzados.

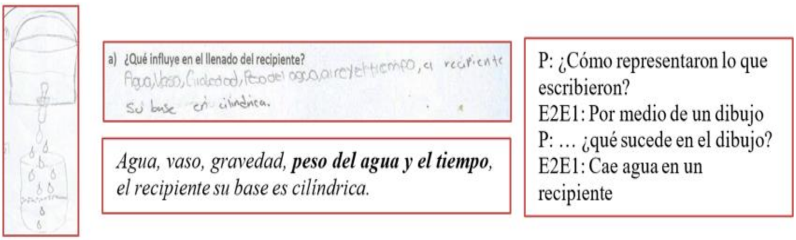
Resultados

A continuación, se muestran algunas producciones y resultados sobre esta primera aplicación de la sesión 1 de la AM para caracterizar a la función de primer grado, en donde se experimenta una situación del llenado de recipiente.

La actividad se realizó en el aula donde los estudiantes toman habitualmente sus clases, la sesión tuvo una duración de 50 minutos.

Figura 3:

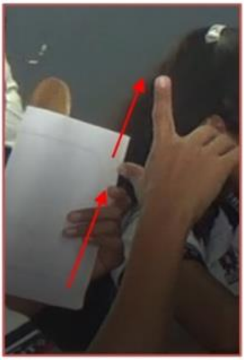
Comunicando el llenado del recipiente



En la figura 3 se muestran algunas producciones del equipo 1, las cuales dejan ver que para este equipo la representación para la comunicación del llenado fue de forma icónica en la que plasmaron la situación a través de los objetos utilizados. Aunque la indicación fue que se podían guiar de sus respuestas a la pregunta, ellos no lograron enlazar la situación con las variables que les pudieran ayudar a comunicar el llenado con alguna herramienta matemática. No lograron coordinar las variables por lo que no se tiene alcance al nivel 1 de razonamiento puesto que no coordinaron el valor de una variable con cambios en la otra.

Figura 4:

Relacionando variables



P: Tenemos tiempo, altura y volumen, ¿Cómo relacionamos jóvenes?

E3E2: El tiempo se relaciona con el volumen, en cuanto tiempo se llena el recipiente, y con la altura *(refiriéndose a la relación tiempo-altura)* para sacar unas medidas de cuánta agua cae.

Esta imagen pertenece a un estudiante del equipo 5, en donde en momento de plenaria se dio ese diálogo. Se muestra que el estudiante al referirse que puede sacar medidas de cuánta agua cae, hace movimientos verticales ascendentes a trozos, esto deja ver que el estudiante logra relacionar las variables inmersas en la situación a partir de la observación y de la interpretación de los datos, el estudiante a alcanzado el nivel 1 de razonamiento covariacional.

Conclusiones

Esta primera exploración permitió reflexionar sobre la práctica docente, por ejemplo, en la realización de las actividades la formulación de las preguntas guías son fundamentales para reorientar la discusión del grupo y con ello identificar los usos del conocimiento matemático que las actividades fomentan, esto permite tomar decisiones en el momento concreto de realización de la exploración en el aula. Cabe mencionar que no se completó la actividad porque no hubo un buen control de los intervalos de tiempos para cada momento de la actividad. Por lo anterior se rediseñará la primera actividad para para lograr alcanzar el objetivo y con ello evidenciar el funcionamiento de los elementos teóricos.

En general, fue una grata experiencia llevar el diseño al escenario escolar, pues es ahí donde se busca tener impacto para significar el saber matemático en cuestión, y para mostrar por qué decimos que estamos innovando.

En principio el innovar, según la RAE, significa "mudar o alterar algo, introduciendo novedoso", entonces nos surgen las siguientes cuestiones: ¿Qué vamos a mudar? ¿Qué vamos a alterar? ¿Qué novedad vamos a introducir? A lo que en general podemos responder es que queremos mudar aquel pensamiento erróneo que se tiene de las matemáticas, queremos mudar aquella visión tradicional del cálculo de la que se habló al comienzo del escrito, queremos alterar aquellas prácticas docente tradicionales en torno al cálculo, queremos alterar la forma de la enseñanza de las funciones polinómicas con diseños sustentados y complementados con el uso de tecnología, todo esto a la par de mostrar evidencia de nuestra hipótesis planteada, mostrar que las situaciones matemáticas basadas en la modelación promueven los niveles de razonamiento covariacional.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 19-48. ISSN: 1665-2436.

Artigue, M. (2000). *Teaching and Learning Calculus. What Can be Learned from Education Research and Curricular Changes in France*. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.) Research in Collegiate Mathematics Education. IV, (pp. 1-15). www.Research in Collegiate Mathematics Education. IV

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.* Barcelona: Gedisa.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33(5),* 352–378.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for research in mathematics education, 26*(1), 66-86.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), pp. 103-128.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa 8*(3), 265-286.

Diccionario de la lengua española, 23.ª ed., [versión 23.3 en línea]. <https://dle.rae.es> [Fecha de la consulta: 15 de febrero 2020]

Ferrari, M., Martínez-Sierra, G. y Méndez, M. (2016). Multiply by adding: Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *Journal of Mathematical Behavior,42,* 92–108. https://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.003

García, J. (2013) La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación 37* (1), 29-42. ISSN: 2215-2644

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: La modelación para la matemática escolar*. Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Méndez, M. y Cordero, F. (2012). La función de la modelación en la resignificación del conocimiento matemático. En O. Covián, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primer Coloquio de Doctorado*, (pp. 257 –267). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav.

Méndez, M. y Cordero, F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática*

Educativa 27 (pp. 1603-1610). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Molina, M. Castro, E. Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las matemáticas, 29 (1)*, 075-088.

Moreno, C. y Ríos, P. (2006) Concepciones en la enseñanza del cálculo. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación. 7*(2), 25-39. ISSN: 1317-5815

Saldanha, L. y Thompson, P. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. B. Berensen & W. N. Coulombe (Eds.). *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education* North America. Raleigh, NC.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009) Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática. 12* (3), 355-382.

Tall, D. (1992). *Students' Difficulties in Calculus*. Plenary presentation in Working Group 3, ICME. Québec. Canada. Agosto 1992. www.warwick.ac.uk/staff/...Tall/.../dot1993kcalculus-wg3-icme.pdf

Universidad Autónoma de Guerrero (2010). *Plan de estudios por competencias* de Matemáticas I.

Niveles de razonamiento covariacional al trabajar la progresión aritmética[10]

Juana Alicia Rojas Estrada - María Esther Magali Méndez Guevara

aliciarojas16.02@gmail.com

En este escrito se reporta los avances de una investigación en curso, que pretende caracterizar la función exponencial a través de la modelación y la covariación. Dada la naturaleza cualitativa de este proyecto, se realizó una actividad del experimento de enseñanza sustentado por la modelación y covariación, en donde se postula que mediante las prácticas de modelación escolar se desarrolla el razonamiento covariacional. Se reportan los resultados del primer diseño de situación realizado a alumnos del nivel medio superior en la Preparatoria No. 2 de la Universidad Autónoma de Guerrero, donde se vislumbra que las prácticas de modelación los llevaron al desarrollo del nivel cuatro del razonamiento covariacional.

Palabras Clave: Modelación escolar, razonamiento covariacional, covariación, progresión aritmética, experimento de enseñanza.

Introducción

Investigaciones realizadas por Artigue (1995, citado por Salinas y Alanís, 2009) dejaron evidencia de que las matemáticas en general, y particularmente el cálculo, se han enseñado desde una perspectiva mecanicista, reduciendo su aprendizaje a prácticas algorítmicas y algebraicas, donde los estudiantes privilegian la obtención de una

---

[10] Rojas, J. y Méndez, M, (2020). Niveles de razonamiento covariacional al trabajar la progresión aritmética. En M. Méndez, M. Ferrari & N. Marquina (Eds.) *Reflexiones sobre la práctica docente de matemáticas Vol 1* (pp. 157-179). Facultad de Matemáticas, UAGro. Acapulco, Gro., México.

respuesta, por encima del proceso que lleva a esta, aspecto que caracteriza a un aprendizaje sin comprensión.

Moreno y Ríos (2006) describen estilos de la enseñanza del cálculo enmarcadas en dos concepciones que afianzan estrategias didácticas distintas para potenciar el desarrollo de las estructuras del pensamiento del estudiante y dotarlo de las herramientas de análisis inherentes al proceso de matematización escolar. La primera es la concepción clásica, donde se ve a la matemática como un saber estructurado con escasa variabilidad y conciben al docente como un instructor que dirige su actividad a la exposición de conceptos ilustrados con ejemplos, seguidos de ejercicios sencillos cuya dificultad va incrementando en la medida que desarrolla la clase. La segunda, es la concepción moderna, donde se ve la matemática como *un saber hacer* que incluye *conjeturas, pruebas y refutaciones de las ideas matemáticas* incluidas en la problemática que se analiza, de modo que la enseñanza que surge de ahí ve al maestro como un formador que invita a *descubrir, inventar y probar ideas a través de la argumentación y de la reflexión crítica*.

Entonces la enseñanza de las ideas de cálculo no es ajena a las concepciones que el profesor podría tener. Una concepción clásica implica una acción educativa se limitan a repetir los conceptos matemáticos tal como aparecen en los libros de texto o en la misma forma en que le fueron enseñados, reduciendo sus clases a una algoritmización de los conceptos del cálculo que los estudiantes contemplan, memorizan y repiten en los exámenes, lo que de acuerdo con Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), es una enseñanza marcada por la manipulación de fórmulas evidenciada en la determinación del límite, derivada o integral de una función, en lugar del análisis de estos conceptos y su aplicación en la solución de los problemas del entorno académico y social del estudiante.

En cambio, bajo la concepción moderna se fomenta un aprendizaje como construcción de significados para que el estudiante construya el conocimiento basándose en su bagaje cultural y en las orientaciones provenientes del profesor que ya no es visto como un transmisor de saberes, sino como el otro participante del proceso de aprendizaje que junto al alumno construye el conocimiento, lo cual significa que su actividad se dirige a promover la organización, interpretación, comprensión del material informativo (Moreno y Ríos, 2006) y generación de escenario para que sea el mismo estudiante el que construya el qué y el cómo de lo que aprende conociendo las variables y condiciones que el escenario le provee.

Ahora bien, siguiendo la idea de la enseñanza del cálculo bajo una concepción moderna como lo plantean Moreno y Ríos (2006), Gascón (2001) habla del modelo epistemológico *cuasi empírico* que concibe de forma distinta el desarrollo de una teoría matemática ya que acentúa periodos en que la teoría es informal, períodos que preceden a la formalización. En ellos tiene sentido descubrir soluciones a problemas interesantes, establecer y probar conjeturas, contrastar, refutar, buscar contraejemplos; todas estas actividades son reivindicadas en su papel de *generadoras de conocimiento.* La influencia del modelo cuasi empírico en el modelo docente consiste en recuperar la actividad matemática exploratoria en el proceso de construcción de conocimiento matemático.

Estos estudios realizados por Moreno y Ríos (2006), y Gascón (2001) procuran introducir actividades en el aula de matemáticas que involucren al estudiante en el proceso de construcción de conocimiento. Por ello, la investigación va encaminada a esta visión, donde se busca que el estudiante sea el generador de su propio conocimiento.

En la enseñanza del cálculo existen varios conceptos, esta investigación se interesa en problematizar el de función. Una secuencia didáctica común en los programas de estudios y libros de texto es: el profesor hace un ejemplo estándar utilizando una variedad de representaciones del concepto al explicar a los estudiantes, luego supone que los estudiantes deben seguir el ejemplo al hacer una tarea similar, y así apropiarse de las representaciones emblemáticas del concepto (fórmulas, gráficos, tablas de número). Esto no permite a los estudiantes aprender o imaginar cuáles son las características que distinguen a las distintas funciones. Investigaciones han demostrado que este tipo de enseñanza provoca una falta de comprensión de la naturaleza de los objetos matemáticos y por ende inhibe su uso para resolver un problema de cálculo (Schwarz y Dreyfus, 1995; Slavit 1997; Dreyfus, 1999, Bloch, 2003).

De acuerdo con Hitt, González-Martín (2015) los estudios que se centran en la adquisición del concepto de función se pueden clasificar en tres enfoques diferentes: enfoque en las representaciones institucionales estáticas, un enfoque integrador donde se fomenta a la modelación matemática (a través de la noción de covariación) y en representaciones institucionales dinámicas.

Los estudios que giran en torno a la capacidad de interpretar el significado de una función al modelar una situación dinámica en la que el estudiante se enfrente a una toma de decisiones sobre las variables y parámetros que controlan una determinada situación, por ejemplo en el estudio de la velocidad de un móvil que varía con el tiempo, requiere atención a cómo una de las variables cambia mientras se imagina cambios de cantidades sucesivas en la otra variable de la función, esta acción mental se ha denominado razonamiento covariacional (Thompson, 1994a; Carlson, 1998; Carlson, Oehrtman, & Engelke, 2010), esto ha sido documentado para representar e interpretar la naturaleza cambiante de las cantidades en una amplia gama de situaciones funcionales y para comprender los conceptos principales en el cálculo (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic, 1996; Kaput, 1992; Thompson, 1994 a,b; Zandieh, 2000).

Por ello, a partir de esta problemática nace la necesidad de incidir en el sistema educativo, se plantea una propuesta de experimento de enseñanza al modelar una situación de variación, en este reporte se presenta la exploración de una actividad del experimento de enseñanza, basado en el estudio de las sucesiones numéricas en la que se generen elementos que formulen un eje de argumentación en el diseño y sean vinculados por prácticas. Prácticas que permitan el desarrollo del razonamiento covariacional para la construcción de la caracterización de la función exponencial.

De lo anterior decimos que la modelación y la covariación forman parte del sustento teórico de la investigación, tomando principalmente la hipótesis que el razonamiento covariacional puede desarrollarse mediante prácticas de modelación.

El estudio permitió identificar las formas particulares de significar las progresiones aritméticas y geométricas, y cómo éstas covarían para caracterizar a la función exponencial, y se reportan las construcciones de los estudiantes de primer semestre del nivel medio superior.

De esta manera es como se pretende generar una innovación en la práctica docente desde la unión de dos constructos teóricos, modelación y covariación, hasta la manera en cómo se aborda al conocimiento matemático, al mostrar evidencias de la hipótesis al caracterizar a la función exponencial en matemática escolar.

Marco conceptual

Covariación y Razonamiento covariacional

Para Confrey y Smith (1995) la noción de covariación implica desplazarse entre valores sucesivos de una variable y coordinar con movimientos entre valores sucesivos correspondientes de otra variable. También expresan que "en un enfoque de covariación, una función se entiende como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales se genera independientemente a través de un patrón de valores de datos" (p.67).

Con base a esta aportación y otras más realizadas sobre la covariación (Saldanha & Thompson, 1998; Thompson, 1994b; Confrey & Smith, 1995; Carlson, 1998) se define el razonamiento covariacional como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002).

De esta manera Carlson et al. (2002) propone un marco de covariación para el estudio del razonamiento covariacional, dicho marco es utilizado para analizar, interpretar y representar el comportamiento de situaciones de funciones dinámicas que involucran dos cantidades simultáneamente cambiantes. Para llevar a cabo el análisis se describen cinco acciones mentales del razonamiento covariacional (Tabla 1), estas acciones proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se exhiben cuando se participa en tareas de covariación; en el marco de covariación también se determina la capacidad de razonamiento covariacional en relación con la acciones mentales expuestas, en otras palabras, se puede dar una clasificación de niveles de la capacidad de razonamiento covariacional dado el desarrollo de las acciones mentales asociadas a esos niveles.

En nuestro experimento de enseñanza se estudia el razonamiento covariacional mediante el desarrollo de las acciones mentales desde la postura de Carlson et al. (2002) caracterizada por niveles (Tabla 1). Postulamos que el contexto de la modelación promoverá el desarrollo de estos niveles.

Con estas caracterizaciones acerca de la covariación y el razonamiento covariacional postulamos que existen prácticas fundamentales en el proceso de modelación que propician el desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional. De tal manera que estudiamos cómo estás prácticas de modelación promueve dicho desarrollo. Como ya se ha mencionado nos apoyamos en la concepción socioepistemológica de modelación, principalmente en una categoría de esta; la cual se describe a continuación.

Tabla 1:

Niveles de razonamiento covariacional

<table>
<tr><td>Acción Mental 1 (MA1): Coordinación del valor de una variable con cambios en la otra.</td><td>Nivel 1 (L1). Coordinación</td><td rowspan="2">Nivel 2 (L2). Dirección</td><td rowspan="3">Nivel 3 (L3). Coordinación cuantitativa</td><td rowspan="4">Nivel 4 (L4). Razón de cambio promedio</td><td rowspan="5">Nivel 5 (L5). Razón de cambio Instantánea</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción Mental 2 (MA2): Coordinación de la dirección de cambio de una variable con cambios en la otra variable.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Acción Mental 3 (MA3): Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Acción Mental 4 (MA4): Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Acción Mental 5 (MA5): Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.</td></tr>
</table>

Nota: Versión libre tomado de Ferrari, Martínez y Méndez, (2016).

Modelación

En esta investigación se adopta a la modelación desde la postura Socioepistemológica que pretende generar un marco apropiado a la matemática educativa, basado en la esencia de la modelación como construcción continua de conocimiento. Se acoge una categoría de conocimiento matemático alternativa para la modelación escolar (Méndez, 2013), propuesta que pretende rediseñar el discurso matemático escolar (dME), para incluir a los actores en la construcción social de su conocimiento matemático, y aminorar la tensión entre la matemática escolar y la matemática funcional, en tanto sea útil a quien la construye y posibilite su desarrollo en otros escenarios (Méndez y Cordero, 2014).

De esta manera la categoría de modelación escolar ha explicitado elementos (Figura 1) que deberían ponerse en juego para desarrollar una matemática orgánica al estudiante y que se hacen tácitos en diseños de situación, dichos elementos son parte de prácticas asociadas al proceso de modelación.

Tales elementos formulan un eje de argumentación en el diseño y son vinculados por prácticas como interpretar, organizar, especular, calcular, ajustar, postular, adaptar y consensuar, entre otros. El núcleo o corazón de esta categoría provoca que emerja el uso de tablas de datos, uso de gráficas y de expresiones analíticas como herramientas que permiten estudiar y explicar la variación local o global, a través de conjeturar sobre la tendencia o mediante caracterizar el comportamiento de intervalos de variación, (Tocto y Méndez, 2015; Méndez y Cordero, 2014). En nuestro caso, se pretende desarrollar el razonamiento covariacional mediante las prácticas de modelación.

Figura 1:

Elementos de la categoría de modelación escolar

Modelación y covariación

Este estudio propone fusionar los elementos teóricos de modelación y covariación. Mediante la hipótesis: las prácticas de modelación propician el desarrollo del razonamiento covariacional. Desde el grupo de investigación propone la tabla 2, como aquella que nos permitirá dar evidencia de este comportamiento, al estudiar situaciones de variación que involucran dos cantidades simultáneamente cambiantes a partir de las prácticas de modelación puestas en juego. Cabe destacar que este es un primer acercamiento.

Tabla 2.

Prácticas de modelación para desarrollar niveles de razonamiento covariacional

<table>
<tr><td>Acción mental</td><td colspan="5">Articulación de los niveles de razonamiento covariacional y prácticas de modelación</td></tr>
<tr><td>Acción Mental 1 (MA1): Coordinación del valor de una variable con cambios en la otra.</td><td>Nivel 1 (L1). Coordinación Observar, interpretar, organizar las variables y condiciones iniciales puestas en juego</td><td rowspan="2">Nivel 2 (L2). Dirección Seleccionar y especular, sobre las variables que intervienen en la situación, la relación entre ellas para percibir qué y cómo varía.</td><td rowspan="3">Nivel 3 (L3). Coordinación cuantitativa. Analizar, comparar y postular para estudiar la variación local, comparando intervalos de cambio identificando cuánto cambia la variable de salida si la de entrada sufre un cambio.</td><td rowspan="4">Nivel 4 (L4). Razón de cambio promedio. Ajustar y calcular, las variaciones globales en términos del comportamiento y el cálculo aproximado de la variación en la razón de cambio de las variables.</td><td rowspan="5">Nivel 5 (L5). Razón de cambio Instantánea. Predecir y anticipar el comportamiento general e instantáneo mediante la conjunción de los parámetros y variables que intervienen en la situación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción Mental 2 (MA2): Coordinación de la dirección de cambio de una variable con cambios en la otra variable.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Acción Mental 3 (MA3): Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Acción Mental 4 (MA4): Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Acción Mental 5 (MA5): Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.</td></tr>
</table>

Metodología

Para la elaboración de la actividad matemática se implementa la metodología de investigación basada en diseño, paradigma metodológico que actualmente es muy útil en el campo de la didáctica de las ciencias. Es de naturaleza principalmente cualitativa y "su objetivo es analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza de una forma sensible a la naturaleza sistemática del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011, p. 76).

Particularmente, para esta investigación se realizó un experimento de enseñanza, este instrumento metodológico consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores, la duración del experimento puede ser variable, (ej. horas, uno o varios años) y la «atmósfera» a observar pueden ser pequeñas habitaciones-laboratorio para entrevistas, clases completas o incluso ambientes de aprendizajes más amplios. (Molina et al., 2011).

Tabla 3.

Estructura de las acciones a realizar en cada una de las fases del experimento de enseñanza.

Experimento de enseñanza	
Fases	**Acciones**
Preparación del experimento	Definir el problema y los objetivos de investigación. Identificar los objetivos instruccionales. Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos. Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización. Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.
Experimentación	Identificar los objetivos instruccionales de la intervención. Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención.
Análisis retrospectivo de los datos	Recopilar y organizar toda la información recogida. Analizar el conjunto de los datos.

Por lo que se elaboró un experimento que consta de cuatro diseños instruccionales, es decir, actividades matemáticas en donde participó el grupo de investigación formado por dos profesoras en formación y una profesora-investigadora, quienes han formulado una articulación entre la modelación-covariación y se ha discutido los experimentos de enseñanza, así como cada uno de los diseños instruccionales de dos investigaciones en proceso.

Este escrito reporta la realización de la exploración de una actividad matemática que es parte del experimento de enseñanza desarrollado por una investigadora en formación docente, 32 estudiantes de preparatoria y un camarógrafo. Esta exploración se realizó mediante las fases del experimento de enseñanza (Tabla 3): preparación del experimento, experimentación para promover el aprendizaje y ejecución del análisis retrospectivo de los datos.

Figura 2.

Esquema del diseño del experimento de enseñanza

Es preciso mencionar que en este reporte sólo se hace análisis de la actividad 1, del experimento de enseñanza, que en concreto permite introducir a los estudiantes en el análisis covariacional desde la modelación de la relación de la variación del número de palillos utilizados con el número de hexágonos formados de una sucesión de figuras.

Participantes

El grupo en el que se trabajó esta prueba piloto consta de 32 estudiantes que cursan la unidad de aprendizaje 'Matemáticas I: Álgebra' que es parte de la etapa de formación básica del primer semestre del nivel medio superior en la Preparatoria No. 2 de la Universidad Autónoma de Guerrero; donde 19 de los estudiantes son mujeres y 13 son hombres, y sus edades oscilan entre los 14 y 15 años.

Preparación del experimento

El experimento de enseñanza consta del diseño de cuatro actividades matemáticas de aprendizaje, el primero tiene como objetivo que el estudiante analice las variaciones de las sucesiones para caracterizar el comportamiento de la progresión aritmética, así mismo, calculen el término general de la progresión. El segundo, que el estudiante analice las variaciones de las sucesiones para caracterizar el comportamiento de la progresión geométrica, así mismo, calculen el término general de la progresión. El tercero, que mediante la observación del crecimiento de células procariotas el estudiante analice el comportamiento exponencial para caracterizar la función exponencial; y el cuarto, analice e identifique elementos influyentes en el comportamiento gráfico de la función exponencial.

Dado que únicamente se implementó y analizó la primera actividad sólo se describirá el diseño instruccional de esa primera actividad. Además, se proyecta los niveles de razonamiento covariacional que están reflejados en los comportamientos mencionados en la tabla 3a. Sin embargo, dado que no se trabaja estrictamente con funciones de dominio real, en las dos primeras actividades, y el grupo con los que se exploró la actividad era de primer semestre de educación media superior no se esperaba que alcanzarán los niveles cuatro y cinco, pero si se logrará identificar el tipo de variación con la que se trabaja en las actividades.

Tabla 3a

Comportamientos de las acciones mentales

Actividad 1		
Acción mental	**Descripción de la acción mental**	**Comportamiento**
Acción Mental 1 (MA1)	Coordinación del valor de una variable con cambios en la otra.	Se identifica que dependiendo del número de hexágonos formados se conocerá el número de palillos utilizados.
Acción mental 2 (MA2)	Coordinación de la dirección de cambio de una variable con cambios en la otra variable.	Se describe que el comportamiento del cambio va en incremento, considerando el cambio en la entrada, es decir, que entre más hexágonos se formen mayor será el número de palillos utilizados.
Acción mental 3 (MA3)	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Se reconoce dos patrones de cambio con comportamiento constante, ambas progresiones aritméticas, es decir, por un lado, para el número de hexágonos con incremento de 1, y por el otro, el número de palillos utilizados con incremento de 5.
Acción mental 4 (MA4)	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada.	Se identifica que la cantidad de palillos está relacionada con un incremento constante de palillos por número de hexágonos.
Acción mental (MA5)	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Se logra formular la expresión $a_n = 6 + 5(n-1)$ para determinar el número de palillos utilizados dependiendo del número de hexágonos.

Uno de los elementos claves de la fase de preparación del diseño, después de definir el problema y el objetivo de la investigación, es definir la secuencia de intervenciones y su temporalidad además de delinear la trayectoria hipotética de aprendizajes esperados, en este caso tienen que ver con los niveles del razonamiento covariacional que se plantearon en el proyecto, esto se explicita a continuación.

Diseño instruccional: Primer episodio

El primer episodio constó de un análisis de las variaciones de la progresión aritmética dada, finalizando con la expresión del término general. Antes de iniciar con la actividad se les entregó una hoja de trabajo que contenía las preguntas expuestas en la tabla 4.

Tabla 4 :

Diseño instruccional del episodio 1.

Episodio 1				
Objetivo general	Que los estudiantes analicen las variaciones de las sucesiones para conocer la progresión aritmética, así mismo, calcular el término general de la progresión.			
Pregunta	**Objetivo** Que el estudiante...	**Resultados esperados**	**Preguntas guía**	**Prácticas de modelación**
1.- Analicen la siguiente sucesión y completen la tabla.	Registre los datos proporcionados a través de la sucesión en la tabla.	Realice el registro de datos y observe cómo varía el número de palillos utilizados con respecto al número de hexágonos formados.		Observar, interpretar y organizar las variables puestas en juego.
2. Realicen lo que se indica y contesten las preguntas. a) Formen cinco hexágonos siguiendo la sucesión de las figuras anteriores, ¿cuántos palillos utilizaron para formarlos?	Observe que se necesitan 26 palillos para formar cinco hexágonos.	Forme la sucesión de cinco hexágonos siguiendo la forma antes expuesta.		Observar, interpretar y organizar las variables puestas en juego.
b) Describan cómo es la forma en que varía el número de palillos utilizados para formar los hexágonos.	Analice cómo varía el número de hexágonos respecto al número de palillos utilizados, es decir, identificar las constantes, donde ambas son aditivas: uno para el número de hexágonos formados y cinco para el número de palillos utilizados.	Determine que se agregan cinco palillos más a cada hexágono formado, además de tener en cuenta el número inicial de palillos.	¿Cómo está cambiando el número de hexágonos? ¿Cómo está cambiando el número de palillos utilizados? ¿Qué significa que vayamos sumando cinco repetitivamente?	Seleccionar y especular, sobre las variables que intervienen en la situación, la relación entre ellas para percibir qué y cómo varía.

Pregunta	**Objetivo** Que el estudiante…	**Resultados esperados**	**Preguntas guía**	**Prácticas de modelación**
c) ¿Cuántos palillos se necesitarían para formar una figura de 32 hexágonos? ¿Cuántos de 78 hexágonos? ¿Y 124 hexágonos? d) ¿Cómo lo determinaron?	Expresa que para conocer el número de palillos utilizados para formar 32, 78 y 124 hexágonos está dado por $6+5(31), 6+5(77), 6+5(123)$ respecti vamente.	Realice operaciones aritméticas como la multiplicació n o suma repetida para completar el cuadro.	¿Cómo saber que el cambio de un hexágono a otro es cinco, te puede ayudar a conocer cuántos palillos utilizarías para formar 32 hexágonos? ¿Qué nos dice el número de palillos utilizados en la primera figura?	Analizar, comparar y postular para estudiar la variación puntual, comparando el cambio identificado en la variable de salida cuando la de entrada sufre un cambio.
e) ¿Cómo determinarían cuántos palillos se necesitaría para formar una figura con n hexágonos?	Determine el término general de la progresión aritmética expresada como $a_n = 6 + 5(n-1)$, le permitirá conocer el número de palillos utilizados para formar n hexágonos.	Expresa que para n hexágonos formados se utilizarán $6+5(n-1)$ palillos, a través del análisis del número de hexágonos con el número multiplicado por la constante cinco.	¿Qué relación existe entre el número de hexágonos y la cantidad de palillos utilizados? Analizando el número de hexágonos con el número multiplicado por la constante cinco, ¿qué similitud podemos notar? ¿Cómo ayudaría con la expresión general?	Predecir y anticipar el comportamiento general e instantáneo mediante la conjunción de los parámetros y variables que intervienen en la situación.

Recolección de datos

Para recopilar esta información se solicitó el apoyo a una compañera de la maestría ya que se hizo uso de una sola cámara, ella se encargó de grabar la clase completa y algunas conversaciones que tenían los equipos. Para la puesta de los siguientes diseños, se contará con tres cámaras; con una de las cámaras un compañero se encargará de videograbar las sesiones en general, es decir, que en la videograbación se tiene que hacer visible la organización, argumentos interesantes de los equipos conformados y las plenarias. Las otras dos cámaras son para videograbar dos equipos, que serán seleccionados con ciertos criterios, aquí los compañeros a cargo sólo videograbarán las producciones del equipo asignado.

Otra técnica con la que se pretende recopilar la información es por los audios, para esto se solicitará apoyo de un integrante por equipo, el cual, con el grabador de voz de su teléfono celular estará audio grabando las producciones del equipo. Al final de cada sesión se guardará la información obtenida en una memoria para su uso posterior. Además de las hojas de trabajo que se entregarán al inicio de la sesión a cada equipo.

Resultados

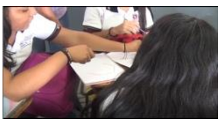
Se realizó una primera exploración de la actividad 1 para caracterizar la progresión aritmética. Esta exploración se llevó a cabo en el aula donde los estudiantes toman habitualmente sus clases, la sesión tuvo una duración de 50 minutos. Los estudiantes se agruparon en siete equipos de cuatro integrantes cada uno.

Para el análisis de los datos se ha sintetizado la producción de los siete equipos, por lo que se mostrarán algunos ejemplos de tres niveles de razonamiento covariacional expuestos en la tabla 3, así mismo las prácticas que sustentan los argumentos de los estudiantes.

Tabla 5

Coordinación del número de hexágonos con el número de palillos.

Nivel l, MA1
P: ¿Cuántos palillos utilizaron?
E1: *En la primera 6*
P: ¿En la segunda?
E1: 12
P: ¿Seguras?
E1: *Sí, tienen 6 lados. Ah… no, 11*. Porque este (señalando el lado del hexágono) cuenta por uno, que los une.
P: ¿cuántas en la tercera?
E1: (comienza a contar en voz alta) *16. Porque este cuenta con uno y este cuenta con uno* (volviendo a señalar el lado que uno un hexágono con otro).



En este extracto (Tabla 5) se muestra el comportamiento de la MA1, al identificar que el número de palillos utilizados cambiará dependiendo del número de hexágonos que se les pide y desde ahí se vislumbra una forma de promover la covariación motivado por las prácticas de modelación, al observar e interpretar el cambio de las variables, esto se evidencia cuando en los tres primeros casos que están observando perciben que para conocer el número total de palillos suman los lados del hexágono y luego restan el lado donde se unen los hexágonos.

Tabla 6

Coordinación del comportamiento en el cambio.

Nivel 2, MA1 y MA2
P: En 32, ¿qué haces? E4: *Multiplicó por el número de hexágonos y resto uno a cada cantidad que tenga*, en este caso restamos por 31 P: a ver… E5: o sea… *un palillo, le restamos un palillo a cada uno porque primero se van uniendo*, (mientras ella explica su compañera hace señas con sus dedos haciendo alusión los lados de los hexágonos que están unidos).

E4: Eso equivale por uno, y como acá me pide la cantidad de 32 lo multiplicamos por 6 menos 31, porque al inicio me sale, bueno… no... menos 32 sería ¿no? Restar. Como nosotras hicimos. Si unimos 32 hexágonos profa (intentaba explicar su idea, pero luego sintió que se confundió y paró de explicar) E5: (interrumpe) Lo que hicimos fue restarle todos los palillos, todos estos palillos (señalando los lados de los hexágonos donde están unidos)

E4: Sí está bien E5: Menos a uno porque… no, está mal E4: No, mira… en dos hexágonos es uno nada más, en tres hexágonos son dos nada más, se resta uno, en cuatro sería tres y en 32 sería 31.

En la conversación de la tabla 6, comienzan a describir el comportamiento de la MA2 al coordinar el cambio de una variable respecto a la otra con frases como "Multiplico por el número de hexágonos y resto uno a cada cantidad que tenga, en este caso restamos por 31" seguida por "Lo que hicimos fue restarle todos los palillos", es decir, identifican que para conocer el número total de palillos utilizados se multiplica el número de hexágonos formados por el número de lados de un hexágono menos los lados donde se unen los hexágonos. Por lo que se puede percibir las prácticas de seleccionar y especular sobre la relación que existe entre las variables para percibir qué y cómo cambia.

Tabla 7

Coordinación de los incrementos entre las variables.

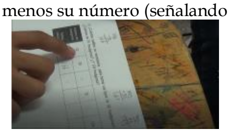
Nivel 3, MA1, MA2 y MA3
E6: (36)(5) P: ¿Por qué (36)(5)? E7: Porque mire... (la interrumpen) E6: …el primero es 6 y después se le va sumando 5 E7: o sea… *el primer hexágono es seis, y ya de ahí tenemos que formar el hexágono y ya nada más se colocan cinco y es todo, por eso de cinco en cinco.* Va aumentando de 5 en 5, y así se va completando la figura.

En la tabla 7, de acuerdo con el comportamiento de la MA3 podemos observar que el E7 reconoce el patrón de cambio constante cuando dice que el número de palillos va incrementando de 5 en 5, al analizar cómo se van formando los hexágonos porque cuando dice "ya de ahí tenemos que formar el hexágono.

En esta conversación E2 expresa el comportamiento de la MA4 cuando menciona que para obtener el número de palillos utilizados cuando se forma 32 hexágonos hace una multiplicación del número de hexágonos por seis, pero percibe que cada vez que aumenta el número de hexágonos tiene que ir restándole uno. Se puede notar que E2 percibe el cambio que tiene la progresión aritmética. Al analizar y comparar estos cambios puntuales, E2 puede postular el cambio que sufre la variable de salida cuando la de entrada sufre un cambio.

Tabla 8:

Coordinación de la cantidad de cambio entre las variables.

Nivel 4, MA1, MA2, MA3 y MA4
E2: Ok, además de esto qué podemos decir de cómo se comporta esto (señalando la primera tabla de la actividad) ¿cuánto cambia?
E3: Por uno…
E4: (Interrumpe) por uno, por dos y por tres cada vez que avanza… Aquí por vez que avanza cambia por uno, por dos y por tres, se lleva a restar menos uno, los hexágonos... no... dónde están juntas así que se restaría menos uno, luego menos dos.
E3: (continua) menos tres, menos cuatro, menos cinco y así.
P: Y acá… ¿cuántos palillos necesitan para formar 32 hexágonos?
E4: Aquí fue la multiplicación que hizo
P: Hicieron una multiplicación… entonces me dicen que si multiplico (32)(6) me va a dar el número de palillos, pero aquí pusieron 161
E2: Le restamos 31, porque es como menos su número (señalando el número 32)

E2: Porque aquí no comienza en menos uno (señalando el valor del número de palillos del hexágono 1), acá sí (señalando el valor del número de palillos del hexágono 2), menos uno, menos dos, menos tres y así sucesivamente. Por eso hice lo de 32 menos uno para que diera menos.

Conclusiones

En la investigación se buscó desarrollar el razonamiento covariacional a partir de prácticas de modelación, para esto se diseñó una situación basada en la modelación escolar que provocaría dicho desarrollo. Las expectativas del diseño en su mayoría se alcanzaron, en la puesta de este primer episodio del experimento de enseñanza se rescata que los estudiantes lograron percibir que la cantidad total de palillos dependía del número de hexágonos que se formaban, es decir, que llegaron a coordinar el cambio de una variable respecto a la otra al determinar que para conocer el total de palillos utilizados se multiplica el número de hexágonos formados por el número de lados de un hexágono menos los lados donde se unen los hexágonos, esto correspondía al número de hexágonos formados menos uno. Pese a que describen cómo era el cambio de estas variables se les dificulta pasar del lenguaje común al algebraico, puesto que al final de la actividad cuando se les pedía representar una expresión que les permitiera conocer el número total de palillos utilizados a partir del número de hexágonos formados, no lograron llegar a representar dicha expresión.

El uso de las prácticas de modelación jugó un papel fundamental ya que generaron argumentos para describir el comportamiento de la situación, promoviendo la covariación y el desarrollo del razonamiento covariacional, lo cual lo podemos vislumbrar por los niveles alcanzados en esta actividad.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P., (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México. Grupo Editorial Iberoamericana.

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics, 52*, 8–28.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1*, 7, 115-162.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33,* 352–378.

Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understanding. *Cognition and Instruction, 28*(2), 113–145.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for research in mathematics education, 26*(1), 66-86.

Cotrill, J., Dubinsky, E. Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics 38*, 85–109.

Ferrari, M., Martínez, G. y Méndez, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior 42*, 92–108.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 4*(2), 129-159.

Hitt, F. & González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate, and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics, 88,* 201-219.

Kaput, J. (1992). Patterns in students' formalization of quantitative patterns. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.): *The concept of function aspects of epistemology and pedagogy*, *MAA Notes 25,* (pp. 290-318). Mathematical Association of America.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar.* (Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Méndez, M. y Cordero, F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, *27*, (pp.1603-1610). México. Colegio de Matemáticas Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29*(1), 75-88.

Moreno, C. y Ríos, P. (2006). Concepciones en la enseñanza del cálculo. Sapiens. *Revista Universitaria de Investigación,* 7 (2), 25-39. Universidad Pedagógica Experimental libertador. Venezuela.

Saldanha, L. y Thompson, P. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.) *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education, 1*, (pp.298-304). Raleigh, NC: North Carolina State University.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355-382.

Schwarz, B. & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematic, 29,* 259-291.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics 33*(3), 259–281.

Thompson, P. (1994a). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 229–274.

Thompson, P. (1994b). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. *Research in Collegiate Mathematics Education, 1*(4), 21–44.

Tocto, M. y Méndez, M. (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En F. Rodríguez & R. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa* (pp. 226-231). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa, 17* (1), 417-436.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education, 8*, 103-127.

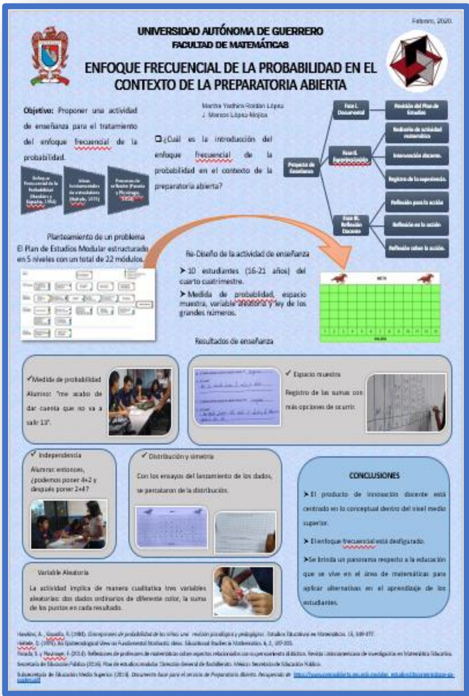
Carteles

C1.- Enfoque frecuencial de la probabilidad en el contexto de la preparatoria abierta

Martha Yadhira Roldán López - José Marcos López Mojica †

El trabajo se realizó en el servicio que ofrece la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS) denominado Preparatoria Abierta. Observamos que la referencia a la probabilidad es poca, tanto en el módulo correspondiente a los temas de probabilidad y de estadística, como en su propósito.

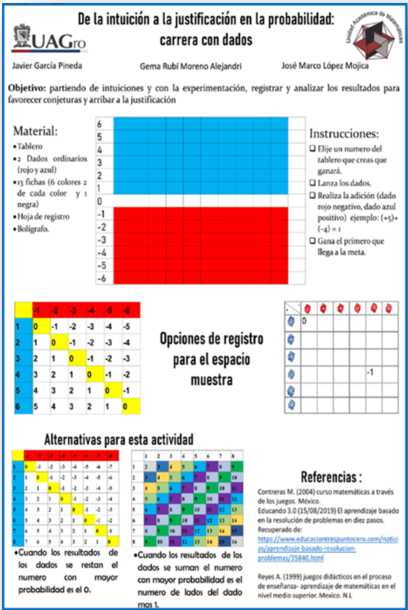
Esto nos permite externar inquietudes sobre el tratamiento de la probabilidad en el nivel educativo en cuestión. Ante la insistencia de relacionar los conceptos de estadística con fenómenos que llaman naturales y procesos sociales, al parecer descuidan la parte de la aleatoriedad y de la intervención del azar. Por lo tanto, plantear una pregunta sobre ¿cuál es la introducción del enfoque frecuencial de la probabilidad en el contexto de la preparatoria abierta?, ¿cuál es la comprensión de la probabilidad frecuencial de alumnos de ese nivel educativo? Lo anterior con el objetivo de proponer una estrategia de enseñanza para el desarrollo de la probabilidad frecuencial.



Palabras clave: Enfoque frecuencial, probabilidad, aleatoriedad y azar.

C2.- De la intuición a la justificación en la probabilidad: carrera con dados

Javier García Pineda – Gema Rubí Moreno Alejandri - José Marcos López Mojica †



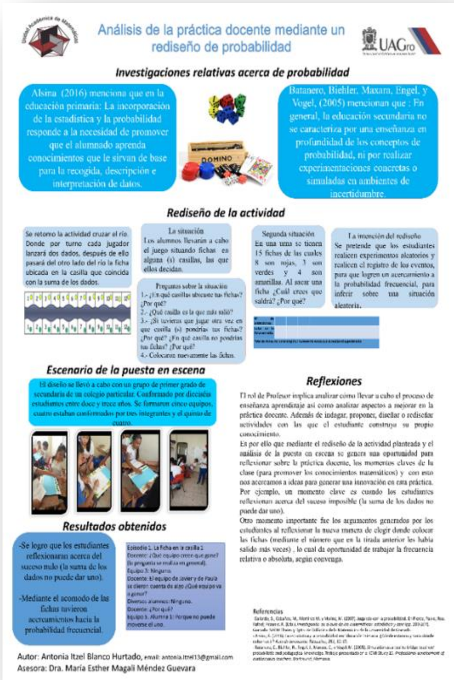
La propuesta de innovación en la intervención docente para la enseñanza de las matemáticas tiene como objetivo: fomentar en el alumno habilidades argumentativas para su proceso de aprendizaje, que permita hacer uso de conceptos matemáticos y generar un criterio amplio de lo que abarca la probabilidad. Se presenta como una alternativa del juego denominada la carrera con dados, donde se cambió la estructura tradicional de numeración de 13 números, usando el mismo tablero, pero ahora con números positivos y negativos. En la parte superior el primer casillero corresponde al número 6 al centro del tablero el número 0 (separa los numero negativos y positivos) abajo del 0 se inicia con el -1 hasta el -6. Se utilizarán dos dados de colores diferentes (rojo y azul); el rojo representa los números negativos y el azul los números positivos que serán utilizados en este juego.

Palabras clave: probabilidad frecuencial, juego.

C3.- Análisis de la práctica docente mediante un rediseño de probabilidad

Antonia Itzel Blanco Hurtado - María Esther Magali Méndez Guevara

Un rol del profesor es analizar cómo llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como analizar aspectos a mejorar en la práctica docente. Otra tarea importante para el docente es indagar, proponer, diseñar o rediseñar actividades con las que el estudiante construya su propio conocimiento. Este cartel reporta una experiencia de análisis de la práctica docente, donde se rediseñó una situación de probabilidad. Se llevó a cabo con estudiantes de entre 12 a 13 años con la finalidad de analizar, reflexionar, mejorar la planeación y la práctica docente misma.

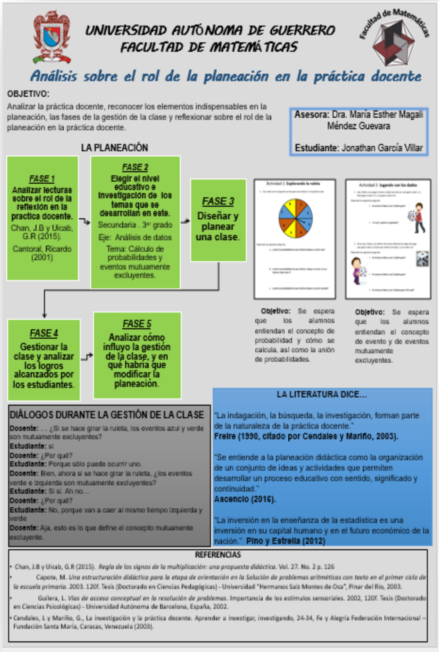


Palabras clave: Probabilidad, Práctica docente, Rediseño.

C4.- Análisis sobre el rol de la planeación en la práctica docente

Jonathan García Villar - María Esther Magali Méndez Guevara

En este trabajo se analizó la práctica docente, reconociendo los elementos indispensables en la planeación, las fases de la gestión de la clase y se reflexionó sobre el rol de la planeación en la práctica docente. Se comparte algunos resultados de la experiencia obtenida durante el desarrollo y reflexión de una clase. La experiencia fue parte de un curso de licenciatura en Metodología de la enseñanza de las matemáticas.



Palabras clave: Planeación, práctica docente, reflexión.

C5.- Análisis de una clase

Juan Uriel Arroyo Ortiz - María Esther Magali Méndez Guevara

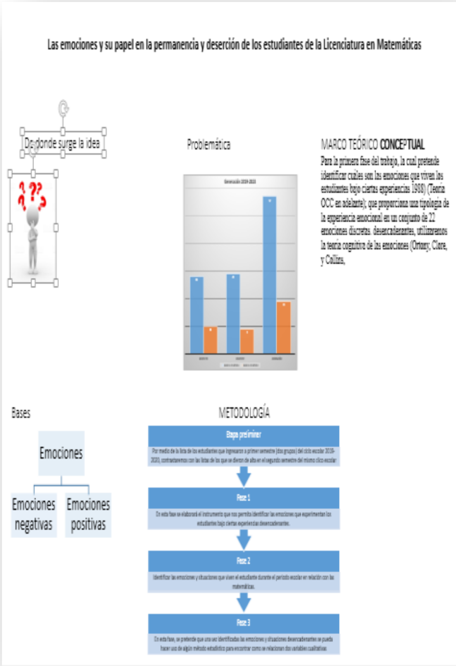
La experiencia que se reporta se detonó con la pregunta ¿Qué es la metodología de la enseñanza de las matemáticas? la cual, en principio, se puede responder como un conjunto de métodos, elementos didácticos y teóricos que se emplean para desarrollar cierto saber matemático. Así se dio inicio al trabajo de la planeación de clase, y el estudio de lecturas que invitaron a reflexionar sobre la práctica docente. Se pretendió, por un lado, contribuir a desarrollar un pensamiento matemático en los estudiantes; y, por otro, fomentar la reflexión sobre la práctica docente. La experiencia fue parte de un curso de licenciatura en Metodología de la enseñanza de las matemáticas

Palabras clave: Planeación, diseño de clase, práctica docente.

C6.- Las emociones y su papel en la permanencia y deserción de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas

Irvin Ricardo Lucas Melchor - Nancy Marquina Molina

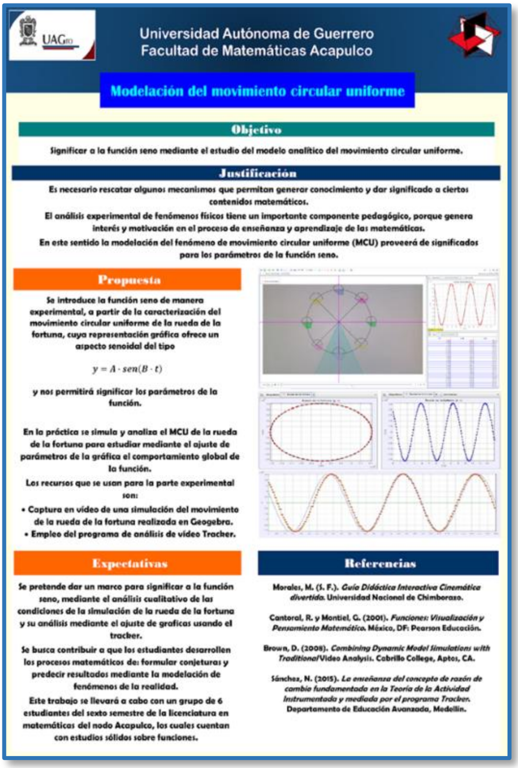
En este proyecto de investigación nos proponemos indagar el papel que juegan las emociones en la permanencia y deserción de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. La investigación se pretende enmarcar en el método mixto. Para ello, nos proponemos, en una primera fase, elaborar un instrumento que nos permita identificar las emociones que desencadenan las experiencias que viven los estudiantes en su formación académica, apoyándonos en la teoría cognitiva de las emociones. Una vez identificadas las emociones, tanto positivas como negativas junto con las experiencias que las desencadenan pretendemos, en una segunda fase, identificar la relación que guardan las emociones negativas y positivas tanto para los casos de deserción como de permanencia, para ello nos auxiliaremos de métodos estadísticos.



Palabras claves: emociones, creencias, dominio afectivo.

C7.- Modelación del movimiento circular uniforme: el uso de gráficas para la función seno

Miguel Ángel Mendoza Merino - María Esther Magali Méndez Guevara



Se presenta un avance de investigación, cuyo objetivo es construir un marco de significados para la función seno mediante el estudio de la gráfica y su relación con las condiciones de la modelación del movimiento circular uniforme. Se diseñará una situación de modelación para desarrollarla en el bachillerato tecnológico.

La investigación toma elementos teóricos de la Socioepistemología y se usa a la Ingeniería Didáctica como metodología de diseño.

Palabras clave: Modelación, variación y cambio, uso de gráficas, ambiente tecnológico.

C8.- Vaciado de un tinaco

Elisa Camacho Reyes - María Esther Magali Méndez Guevara

En el presente trabajo representamos el proyecto de trabajo que se realizó durante el diplomado Introducción a la Práctica Docente de Matemáticas, con el eje pensamiento y lenguaje variacional. El tema desarrollado fue: razón de cambio mediante dos magnitudes. Se diseñó una actividad que estuviera relacionada con el contexto de los estudiantes a los que se invitaría a participar. Posteriormente, realizamos un primer análisis de la experiencia de enseñanza que nos retroalimentó para proponer mejoras al proyecto y una posterior aplicación.

Palabras claves: razón de cambio, variación, magnitud.

C9.- Elaboración y aplicación de un proyecto de enseñanza acerca de las "Leyes de exponentes" en el nivel Bachillerato

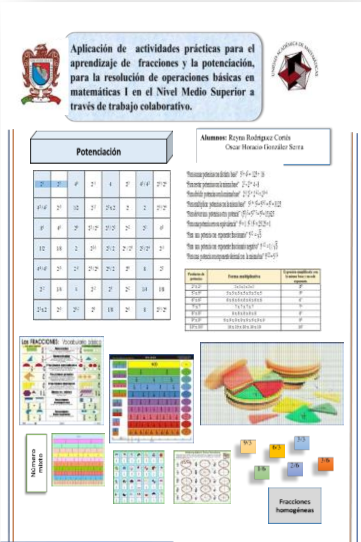
Ada Cecilia Blanco Ruiz - Nancy Marquina Molina

En este cartel se da a conocer la experiencia de la elaboración y aplicación de un proyecto de enseñanza sobre el tema "leyes de exponentes", implementado a un grupo de 25 estudiantes de primer año de bachillerato. Dicho proyecto se llevó a cabo durante el diplomado de "Introducción a la innovación de la práctica docente de matemáticas" en cuatro fases las cuales fueron: diseño de actividad y planeación, experiencia en el aula, reflexión sobre la práctica docente y presentación del proyecto. El objetivo de este proyecto de enseñanza fue lograr que los alumnos tuvieran mayor comprensión justificando algunas leyes. En este proyecto sólo se trabajaron algunas de las leyes de los exponentes, quedando como reto el diseñar actividades que permitan a los estudiantes construir el resto de las leyes de los exponentes de tal forma que no sólo las memoricen, sino que las construyan, y al hacerlo encuentren su justificación.

Palabras clave: Proyecto de enseñanza, leyes de exponentes

C10.- Potenciación, para la resolución de operaciones básicas en Matemáticas I en el Nivel Medio Superior a través de trabajo colaborativo

Reyna Rodríguez Cortés - Oscar Horacio González Serna



En la presente investigación se tiene como referencia la enseñanza de Matemáticas I en el nivel medio superior. La problemática identificada en nuestra experiencia como docentes giró alrededor de la falta de actividades prácticas para el aprendizaje de fracciones y la potenciación en los números reales.

Consideramos que, para propiciar la resolución de operaciones aritméticas se requiere seleccionar adecuadamente los ejercicios que sean más significativos para los alumnos y sobre todo que se promueva el trabajo colaborativo para una mayor integración de los conocimientos individuales.

En este proceso es primordial la revisión de distintas referencias sobre la didáctica para los docentes y utilizar todos los recursos disponibles a través del uso de las tecnologías para una mayor difusión de los contenidos de las actividades de aprendizaje.

Palabras clave: Actividades, enseñanza, fracciones, potenciación y colaborativo.

C11.- Propuesta de enseñanza "Teorema de Pitágoras"

José Antonio Ramírez Arroyo - Gema Rubí Moreno Alejandro

En este trabajo se diseñó una clase bajo el enfoque de la demostración matemática en contexto escolar, buscando propiciar el desarrollo de la argumentación inductiva a la deductiva.

Nos propusimos analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el estudio de las matemáticas, en particular sobre la asignatura de Matemáticas III, que corresponde al área de Geometría. En especial, nos ocuparemos de la enseñanza y comprensión del Teorema de Pitágoras utilizando, como herramienta, a GeoGebra.

Emerge de esta propuesta, acercar al alumno al razonamiento del porqué de propiedades geométricas, buscando no mecanizar el aprendizaje, sino motivar a la argumentación matemática e inducirlo, en principio, de forma heurística

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, argumentación.

C12.- Espacios, formas y medidas mediante puzzles topológicos

Anayeli Garcia Gelacio - Berenice Palacios Olivares.

La intención de este juego de puzzles topológicos consiste en que los estudiantes conozcan la concepción de espacio y nudo. La actividad consiste en sacar la cuerda del pedazo de madera y/o liberar uno o hasta más aros, pero también "es necesario llegar a la solución sin deshacer los nudos que puedan estar a la vista, ni romper ninguno de los elementos que forman el juego" (Hans, Muñoz y Fernández-Aliseda, 2004, 68).

Los puzzles topológicos "consta de un trozo de madera donde se han realizado tres agujeros por los que se anuda una cuerda que se cruza formando dos lazos. El agujero importante es el central, pues los orificios de los extremos sólo sirven para sujetar la cuerda y que no quede libre. En cada lazo aparece una bola, cuya dimensión no le permite pasar por ninguno de los agujeros de la madera" (Hans et al., 2004, 68).

La actividad se llevó a cabo en la Expomatemática, la cual se realizó en el Parque Papagayo viendo una buena respuesta del público.

Palabras clave: Espacio, topología, rompecabezas topológicos, divulgación.

C13.- El uso de videojuegos como recurso para mejorar la resolución de problemas en alumnos de tercer grado de Secundaria

Juan Felipe Zamora Hernández
Colegio Simón Bolívar Campus Palma Sola

Para un alumno aterrizar una idea abstracta en el ámbito de las matemáticas se convierte en un inconveniente que afecta en el momento de enfrentarse a un problema. Tener el conocimiento, pero no poder aplicarlo es una de las razones por las cuales, en su mayoría, los alumnos "detestan" la materia de matemáticas. Considerar la actualidad de los alumnos y el mundo tecnológico que los rodea deberá ser obligación de un docente. Cuando existe un dominio total del tema se puede transmitir de manera eficaz cualquier tipo de mensaje de modo que no debería de ser complicado encontrar una relación matemáticas-videojuegos para poder alcanzar aquel clic tan deseado por los maestros. Lograr despertar el interés por un tema, más aún por la materia debe de ser la motivación que todo maestro desee alcanzar y es ahí donde surge cuestionarnos sobre ¿se podrá enseñar matemáticas por medio de los videojuegos?

Palabras clave: matemáticas, videojuegos, lúdico, didáctica, problemas.

C14.- Tablero matemático

Rebeca Vilchis Orbe - Diana Karina Corona Gómez.

Presentamos en este cartel, nuestra experiencia sobre un juego que llamamos "Tablero Matemático" cuya idea surge a partir de una invitación que se le hizo al grupo de divulgación de la Facultad para participar en una escuela primaria. El objetivo principal de la actividad es hacer que los participantes jueguen mientras aprenden, mejorando así sus habilidades matemáticas.

El juego comienza con una ronda de máximo 9 participantes, a las cuales se les va a pedir que realicen una cierta operación, todos deberán correr y colocarse en la respuesta que consideran correcta.

Debido a que se siguieron haciendo invitaciones a diferentes escuelas, se tuvieron que realizar adaptaciones al juego, en este caso a nivel preescolar y medio superior, experiencias que compartimos en este evento.

Palabras clave: Operaciones aritméticas, divulgación.

C15.- Argumentos intuitivos de la probabilidad: una experiencia de clase

José Luis Escobar Ignacio - Nancy Marquina Molina - José Marcos López Mojica†

Se expone una experiencia de clase donde se pueden identificar primeros avances en el análisis de argumentos intuitivos sobre la probabilidad. De manera particular se trabajó en el eje *probabilidad y estadística*, sobre el tema de nociones de probabilidad.

Los objetivos son:

- Desarrollar habilidades en los alumnos para la comprensión de qué es el azar.
- Desarrollar habilidades para la comprensión de las características del azar.
- Desarrollar habilidades para la comprensión del tipo de situaciones donde interviene el azar.

Algunos de los resultados obtenidos sugieren una evolución en el tipo de argumentos, empleados por los niños para explicar las características de la situación azarosa.

Palabras clave: Argumento, probabilidad, estadística, azar